

Docentenhandleiding Functionele Algoritmes

Lesmateriaal Computationeel en Wiskundig denken



Universiteit Utrecht



Inhoudsopgave

Vooraf.....	4
Voorbereiding.....	4
Uitvoering	5
Toetsing en data.....	5
Uitgangspunten van het lesmateriaal.....	6
Leerdoel en opbouw van de lessenserie	7
Werkwijze	9
Differentiatie	9
Lesvoorbereiding.....	10
Hoofdstuk 1 Lijn door twee gegeven punten.....	10
Hoofdstuk 2 Middelloodlijn	12
Hoofdstuk 3 Zwaartepunt.....	13
Hoofdstuk 4 Raaklijn aan een parabool.....	14
Hoofdstuk 5 Bundels raaklijnen aan parabool	14
Hoofdstuk 6 Raaklijnen aan andere grafieken.....	15
Hoofdstuk 7 Eindopdracht.....	16
Docentenlogboek	17

Colofon

Dit lesmateriaal is ontwikkeld in het kader van het NRO langlopend onderzoek “Computationeel en wiskundig denken”, projectnummer 40.5.18540.130.

Doelgroep: vwo-5 wiskunde B

Auteurs: Wim Caspers, Juan Dominguez, Paul Drijvers, Fetske Zwaga, Sylvia van Borkulo

Status: versie 2, 3 maart 2021

© Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Vooraf

Dit document is een aanzet voor een docentenhandleiding bij het lesmateriaal rond computationeel denken in vwo-5 wiskunde B, met als titel Functionele Algoritmes. Het is geschreven als voorbereiding op de pilots met dit materiaal in het najaar van 2020. Een kanttekening hierbij is dat deze handleiding geschreven is “vanachter het bureau”. We vragen de docenten die het gebruiken dan ook om dit document zoveel mogelijk aan te vullen, zodat ook docenten die minder bekend zijn met de gedachten achter de lessenserie met het materiaal uit de voeten kunnen. Naast deze handleiding is er een Engelstalige Rationale, die de theoretische en onderzoeksmatige achtergrond verder belicht.

Voorbereiding

Voor de lessenserie van start kan gaan is een aantal voorbereidende stappen nodig.

- Toestemming
Omdat de lessen worden geobserveerd en data van leerlingen worden verzameld, is het nodig dat de leerlingen (en hun ouders, afhankelijk van de leeftijd) vooraf een toestemmingsformulier ondertekenen en inleveren. Een format voor dit formulier wordt aangeleverd. Het is prettig om dit voorafgaand aan de eerste les te regelen.
- Repro lesmateriaal
We moeten even overleggen of de reproductie van het lesmateriaal op de school zelf plaatsvindt, of dat het wordt aangeleverd vanuit de UU. Er kan natuurlijk ook digitaal in het werkboek gewerkt worden.
- Informatie leerlingen
Het is goed om de leerlingen in te lichten over de doelen van de lessenserie en het achterliggende onderzoek. Daarbij is het wellicht belangrijk om bij de leerlingen te benadrukken dat de wiskunde die aan de orde komt van belang is voor het examen, dus dat het niet gaat om extra onderwerpen of verloren tijd. Daarnaast is het goed om duidelijk te maken of hun werk op een of andere manier meetelt of wordt beloond. Of dit gebeurt en hoe is aan de docent zelf.
- ICT-faciliteiten
De lessen maken gebruik van GeoGebra, dus het is van belang dat leerlingen dat in de les kunnen gebruiken. Dat kan via een computerlokaal, of via laptops, chromebooks of tablets in de klas. Met het oog op klassengesprekken en nabesprekingen is het ook goed als een GeoGebra-scherm kan worden geprojecteerd.
- File management
Er zijn twee manieren om GeoGebra te gebruiken: Leerlingen kunnen GeoGebra Classic 6 offline gebruiken. Dan is geen internetverbinding nodig, maar moet de software wel vooraf geïnstalleerd zijn. Of leerlingen kunnen de online webversie gebruiken. Dan dus geen installatie, maar wel wifi. In beide gevallen moet er iets afgesproken worden over het bestandsbeheer: waar slaan de leerlingen hun resultaten op zodat de docent (en de onderzoekers uiteindelijk ook) er toegang toe hebben? Ook dit wordt aan de docent zelf overgelaten. Het is denkbaar dat leerlingen per tweetal GeoGebra bestanden maken. Een eigen werkboek voor elke leerling is wel wenselijk.
- Voorkennis
De wiskundige voorkennis van de leerlingen zal geen probleem zijn: die beperkt zich tot het opstellen van vergelijkingen van lijnen en raaklijnen. Differentiëren van eenvoudige functies komt daarbij kijken. Verder wordt in het lesmateriaal een iets afwijkende vorm

van de vergelijking door twee punten geïntroduceerd, maar dat zal geen probleem zijn. De voorkennis van leerlingen wat betreft GeoGebra kan worden geactualiseerd met een introductiepracticum van 1 lesuur, zie bijvoorbeeld <bron Getal en Ruimte?>. De tijd die dit kost, is niet ingecalculeerd in de vijf lessen die dit materiaal (minimaal?) zal kosten.

- **Tijdplanning**

We weten nog niet precies hoe snel leerlingen van vwo-5 wiskunde B door dit materiaal gaan. Met name de laatste opdracht, opdracht 7 over Newton-Raphson, zal wellicht tijdrovend zijn. Wellicht is differentiatie mogelijk. We denken dat ook leerlingen die niet het hele pakket doorwerken er wat van leren.

- **Observatie**

Geef svp roostergegevens (geplande lestijdstippen en lokalen) door aan de beoogde observanten

Uitvoering

Tijdens de uitvoering zijn de volgende aandachtspunten van belang.

- De pretest wordt voorafgegaan door een video ter illustratie van computationeel denken en het belang van het exact beschrijven van je stappen: <https://fb.watch/45ZvJfAipp/>.
- De lessenserie gaat over computationeel denken. Het moet de leerlingen duidelijk worden dat ze m.b.v. computationeel denken vraagstukken in GeoGebra gaan oplossen. Het is dus van belang om tijdens de lessenserie op gezette momenten (bijv. in klassengesprekken) de aspecten van computationeel denken te benoemen die aan de orde zijn gekomen, zoals probleem opdelen in kleinere deelproblemen, precies formuleren, formules/commando's gebruiken en daarbij parameters precies invullen, en evalueren of de juiste oplossing gevonden is.
- Benadruk bij leerlingen dat ze hun **antwoorden invullen** in hun werkboekjes en dat de werkboekjes en GeoGebra-bestanden worden ingenomen, en zorg ervoor dat dit aan het einde van de lessenserie ook daadwerkelijk gebeurt.
- Bespreek svp in de les ook klassikaal de kernopgaven en vraag daarbij aan leerlingen of het is gelukt, wat ze hebben gedaan, om hun aanpak uit te leggen, om de moeilijkheden die ze hadden te beschrijven, om de GeoGebra-technieken uit te leggen, etc. In de lesvoorbereidingen aan het einde van dit document wordt aangegeven welke opgaven kernopgaven zijn en staat een aantal suggesties voor vragen die bij deze klassengesprekken aan de orde kunnen komen.
- Vul na elke les svp zelf een logboekblad in; zie hiervoor het template, maar voel je vrij daarvan af te wijken.
- Geef wijzigingen in roostergegevens (tijdstippen, lokalen, lesduur, etc.) en door aan de beoogde observanten.

Toetsing en data

Het toetspakket bij deze lessenserie bestaat uit drie elementen:

1. Een voortoets voorafgaand aan de lessenserie, die wordt aangeleverd vanuit het onderzoek. Het moet de leerlingen duidelijk zijn dat het om computationeel denken gaat. Deze papier-en-pen toets duurt naar schatting 25 minuten. Bij deze toets is een beoordelingsmodel/correctievoorschrift beschikbaar. Nakijken ervan kan door leden van het onderzoeksteam worden gedaan.

2. Een eindopdracht die leerlingen individueel of in groepjes maken en inleveren. Voorstel is om hiervoor hoofdstuk 7 uit het lesmateriaal te gebruiken. Beoordeling hiervan kan door de docent i.s.m. met het onderzoeksteam worden gedaan. De docent beslist of en op welke manier het resultaat voor leerlingen meetelt.
3. Natoets na afloop: deze bestaat uit twee delen, een eerste algemene deel, vergelijkbaar met de voortoets, en een tweede deel dat specifiek op de lessenserie ingaat. Het moet de leerlingen duidelijk zijn dat het om computationeel denken gaat. Het is een pen-en-papier toets van in totaal 50 minuten. Bij deze toets is een beoordelingsmodel/correctievoorschrift beschikbaar. Nakijken ervan kan door leden van het onderzoeksteam worden gedaan. De docent beslist of en op welke manier het resultaat voor leerlingen meetelt.

Onderzoeksdata die worden verzameld omvatten:

1. Leerlingenwerk voortoets: graag scannen en als pdf aan onderzoeksteam ter beschikking stellen.
2. Leerlingwerkboeken: in geval van papier graag scannen en als pdf aan onderzoeksteam ter beschikking stellen.
3. Leerlingenwerk eindopdracht: graag scannen en als pdf aan onderzoeksteam ter beschikking stellen.
4. Leerlingenwerk natoets: graag scannen en als pdf aan onderzoeksteam ter beschikking stellen.
5. Logboek van uitvoerende docent.
6. Online interviews die onderzoeker afneemt via een laptop tijdens de lessenserie, in overleg en met medewerking van de docent.
7. Het laatste rapportcijfer voor wiskunde van de leerlingen.

Uitgangspunten van het lesmateriaal

Bij het ontwerpen van het lesmateriaal is een aantal uitgangspunten leidend geweest. Ten eerste moet de wiskundige inhoud aansluiten bij het programma van wiskunde B in vwo-5. Omdat algebra en analyse rond functies centraal staan in dit programma, richten we onze lessenserie daarop. Het basisidee is dat problemen worden opgelost waarin standaardfuncties (bijvoorbeeld veeltermfuncties) en standaardprocedures (zoals vergelijkingen oplossen, functies differentiëren, raaklijnen opstellen) aan de orde komen. De kennis hiervoor is in principe al aanwezig en wordt dus herhaald, maar in een nieuwe context, namelijk die van het ontwerpen van algoritmes. Voor leerlingen kan het leuk zijn om te zien dat het werk dat ze met pen en papier al beheersen efficiënt en flexibel kan worden uitbesteed aan een tool. Om de algoritmes generiek te maken, zullen vaak parameters nodig zijn.

Een tweede uitgangspunt is dat computationeel denken een rol speelt. Computationeel denken omvat meer dan 'denken als een computer': het gaat ook over het analytisch leren denken over manieren om complexe problemen aan te pakken. Daarbij spelen zaken een rol als het opdelen van een probleem in kleine stukjes, het herkennen van patronen, het filteren van informatie, het maken van schema's en tekeningen, het generaliseren. In dit lesmateriaal ligt de nadruk op probleemoplossen en algoritmisch denken. Onder algoritmisch denken verstaan we dan het vermogen om algoritmes te lezen, gebruiken, begrijpen en ontwerpen, die door een apparaat kunnen worden uitgevoerd en die een wiskundige procedure uitvoeren om een probleem op te lossen.

Ten derde is als “apparaat om procedures uit te voeren” gekozen voor GeoGebra, dat enerzijds laagdrempelig is en op scholen veel wordt gebruikt, maar anderzijds ook serieuze open wiskundige software is: in de modules van GeoGebra is veel wiskundige kennis neergeslagen. GeoGebra wordt hier vooral ingezet voor het bij het uitvoeren van algebraïsche en analytische bewerkingen met functies; GeoGebra’s mogelijkheden voor synthetische meetkunde komen dus niet of nauwelijks aan de orde.

Ten vierde zoeken we in de lessenserie een balans tussen plugged en unplugged activiteiten. Het unplugged aspect betreft het uitwerken van een probleemaanpak op papier voorafgaand aan het gebruik van GGB. Plugged betekent dus algoritmes ontwerpen voor oplossingsprocedures in GeoGebra. De technische middelen daarvoor binnen GeoGebra zijn (1) conditionele statements met IF/ALS, (2) herhalingen en iteraties met SEQUENCE/RIJ, (3) declaratief of functioneel programmeren door series van functies te definiëren, en (4) het bundelen van series van stappen door macro’s te maken. Leerlingen wordt gevraagd hun aanpak op papier uit te schrijven voor ze die in GGB invoeren.

Als vijfde uitgangspunt, ten slotte, willen we dat elke leerling uit de voeten kan met de opgaven, bijvoorbeeld door differentiatiemogelijkheden en steun in de vorm van tips of uitwerkingen in de vorm van voorbeeldbestanden. Verderop komen we nog op differentiatiemogelijkheden terug.

Leerdoel en opbouw van de lessenserie

Het leerdoel van de lessenserie luidt: De leerling leert om tijdens het oplossen van problemen (onderdelen van) de oplossingsprocedure te beschrijven in termen van definities en algoritmes die kunnen worden uitbesteed aan geschikte software.

De lessenserie bestaat uit een aantal activiteiten, die enerzijds op zichzelf staan en anderzijds een samenhangende serie vormen. In grote lijnen bestaat het materiaal uit drie delen:

- Opdrachten 1-2-3 over lijnen
Het begint met de lijn door twee punten, dan de middelloodlijn, en dan zwaartelijnen. Dit lijkt voldoende toegankelijk voor leerlingen en heeft duidelijke samenhang. Het idee is dat leerlingen als het ware procedures die meetkundig al in GeoGebra aanwezig zijn zelf gaan reconstrueren met behulp van algebra en functies.
- Opdrachten 4-5-6 over raaklijnen
Hierin gaat het eerst over een raaklijn aan een parabool, die dan dynamisch wordt in de zin dat je die kunt verslepen. Vervolgens ontstaan mooie plaatjes als bundels van raaklijnen aan parabolen. Ten slotte komen ook bundels raaklijnen aan andere grafieken aan de orde. De samenhang is dus dat het allemaal gaat over procedures voor raaklijnen.
- Eindopdracht 7 over raaklijnen tbv nulpuntsbenadering
Deze opdracht is vrij pittig, maar kan als afrondende opdracht gebruikt worden die ook beoordeeld kan worden.

De volgende tabel geeft een wat gedetailleerder beeld van de opbouw van het lesmateriaal.

	Leerling activiteit	Leerdoelen wiskundig denken	Leerdoelen algoritmisch denken	GeoGebra technieken

Functionele Algoritmes

Opdracht 1 Lijn	<ul style="list-style-type: none"> - Leerling stelt procedure op om lijn door twee gegeven punten te laten tekenen in GeoGebra. - Leerling snapt het bijzondere geval van de verticale lijn en bouwt dit in in GeoGebra - Dit vraagt om werken met variabelen en parameters - Dit bereidt voor op opdracht 2. 	<ul style="list-style-type: none"> - Herhalen opstellen vergelijking van een lijn door twee gegeven punten - Ook gebruik van de vorm $y = m \cdot (x-a) + b$ als vergelijking van lijn door punt (a, b) - Inzicht dat de vergelijking in het vorige punt niet werkt voor verticale lijnen; dan $x = c$ 	<ul style="list-style-type: none"> - Het definiëren van lineaire functies - Het bepalen van de inhoud van het ALS-statement 	<ul style="list-style-type: none"> - Invoeren functie in algebravenster - x-coördinaat van punt A oproepen met $x(A)$ - Gebruik ALS commando met syntax - Gebruik boolean met $==$ om voorwaarde ALS te definiëren.
Opdracht 2 Middelloodlijn	<ul style="list-style-type: none"> - Leerling stelt procedure op om de middelloodlijn van twee gegeven punten te laten tekenen in GeoGebra. - Leerling snapt het bijzondere geval van de verticale lijn en bouwt dit in in GeoGebra - Dit vraagt om werken met variabelen en parameters. 	<ul style="list-style-type: none"> - Als bij opdracht 1 - Het inzicht dat de RC van een loodlijn op een lijn met $RC=m$ gelijk is aan $-1/m$ - Het inzicht dat de coördinaten van het midden van twee punten gelijk zijn aan het gemiddelde van de respectievelijke coördinaten 	<ul style="list-style-type: none"> - Als bij opdracht 1 - Het definiëren van het midden van twee punten 	<ul style="list-style-type: none"> - Als bij opdracht 1
Opdracht 3 Zwaartepunt	<ul style="list-style-type: none"> - Leerling stelt procedures op om het midden van punten te bepalen, en zwaartelijnen en het zwaartepunt. Een nieuwe vorm van vergelijking van een lijn wordt ingevoerd. 	<ul style="list-style-type: none"> - Als bij opdracht 1 - Het inzicht dat de vergelijking van de lijn met richtingscoëfficiënt m door het punt (p, q) de vorm $y=m(x-p)+q$ kan hebben. 	<ul style="list-style-type: none"> - Het generiek definiëren van het zwaartepunt van drie punten 	<ul style="list-style-type: none"> - Als bij opdracht 1 - In algebravenster definities van objecten zichtbaar maken
Opdracht 4 Raaklijn	<ul style="list-style-type: none"> - De raaklijn aan een standaard parabool in $x=1$ wordt getekend door een GGB procedure. - De procedure wordt gegeneraliseerd voor andere parabolen. 	<ul style="list-style-type: none"> - Herhaling van opstellen van vergelijking van een raaklijn aan een parabool. - Opnieuw gebruik van de vorm $y = m \cdot (x-a) + b$ als vergelijking van lijn door punt (a, b) 	<ul style="list-style-type: none"> - Het generiek definiëren van een parabool dmv parameters 	<ul style="list-style-type: none"> - Het berekenen van de afgeleide waarde in een punt
Opdracht 5 Bundel raaklijnen aan parabool	<ul style="list-style-type: none"> - Een GGB-procedure wordt opgesteld voor het tekenen van een bundel raaklijnen aan de standaard parabool. - Deze procedure wordt gegeneraliseerd voor alle parabolen. 	<ul style="list-style-type: none"> - Als opdracht 4 - Het inzicht dat je bij het definiëren van een vergelijking die mede afhangt van een parameter twee variabelen nodig hebt 	<ul style="list-style-type: none"> - Het generiek definiëren van de vergelijking van de raaklijn in een variabele punt, dus in termen van twee variabelen - Het bepalen van de parameters van het Sequence commando 	<ul style="list-style-type: none"> - Als opdracht 4 - Gebruik Sequence commando en de syntax daarvan. (IteratieLijst in NL?)

			voor het herhalen van de raaklijnprocedure	
Opdracht 6 Raaklijnen aan andere grafieken	- De procedures van de vorige opdracht worden aangepast voor grafieken van andere functies dan kwadratische.	- Als opdracht 5	- Als opdracht 5	- Als opdracht 5 - Gebruik van CAS venster. Dat zal wat toelichting vragen.
Opdracht 7 Nulpunten met raaklijnen: Newton-Raphson	- Er wordt een procedure ontwikkeld voor het benaderen van nulpunten volgens de methode van Newton-Raphson.	- Het generiek bepalen van de coördinaten van het snijpunt van de raaklijn aan de grafiek met de horizontale as - Het inzicht dat je naar verwachting door herhaling van deze procedure een nulpunt van de functie benadert	- Het bepalen van de elementen die onderdeel van de NR-macro moeten worden - Het bepalen van de parameters van het IteratieLijst commando voor het herhalen van de NR-procedure	- Een macro maken voor NR - Gebruik IteratieLijst commando en de syntax ervan.

Werkwijze

De werkwijze in de klas is natuurlijk primair de expertise en de verantwoordelijkheid van de docent. Toch wat suggesties op dit punt:

- Leerlingen kunnen veel zelf werken, maar zullen vermoedelijk ook behoefte hebben aan klassikale samenvattingen / syntheses, waarin zowel de wiskundige als de GeoGebra-technische aspecten aan de orde komen. Daarin kan leerlingenwerk ook door hen gepresenteerd of toegelicht worden. Het is wellicht een rol voor de docent om de grote lijn van de opdrachten duidelijk te maken en ook om aan te geven hoe het computationeel en algoritmisch denken in de opgaven verweven zit.
- Mogelijk zal het GeoGebrascherm veel aandacht van de leerlingen trekken. Toch is het advies om leerlingen te stimuleren om voor ze in GeoGebra beginnen te werken eerst “unplugged” een plannetje te maken op papier, een stappenplan of een stroomschema te tekenen, en ook de resulterende algoritmes in het werkblad te noteren. De docent zal het werken in het werkblad wellicht regelmatig onder de aandacht moeten brengen.
- Als leerlingen technische vragen over GeoGebra hebben, kan het goed zijn hen op de hints aan het einde van elke opdracht te wijzen, als ook op de helpfunctie van GeoGebra, die uitstekend is. Vermoedelijk kunnen ze zichzelf zo vrij goed redden, zeker ook als ze in tweetallen samenwerken en kunnen overleggen.

Differentiatie

Zoals hierboven opgemerkt is het de bedoeling dat alle leerlingen met het materiaal aan de slag kunnen. De tabel hieronder bevat een indicatie van opgaven die gebruikt kunnen worden bij de differentiatie tussen leerlingen die snel dan wel langzaam door het materiaal gaan.

Opdracht nr	Instapvragen (concreet)	Generalisatievragen (algemeen)	Extra uitdaging
Opdracht 1 Lijn	1, 2, 3	4, 5	6, 7
Opdracht 2 Middelloodlijn	1, 2, 3	4, 5	6, 7
Opdracht 3 Zwaartepunt	1, 2, 3	4, 5	6, 7
Opdracht 4 Raaklijn	1, 2	3, 4	
Opdracht 5 Bundel raaklijnen aan parabool	1, 2	3, 4	5,6
Opdracht 6 Raaklijnen aan andere grafieken	1, 2	3	4
Opdracht 7 Nulpunten met raaklijnen: Newton- Raphson	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	9, 10	11

Lesvoorbereiding

Hieronder staat een suggestie voor de indeling van de lessen en vragen die kunnen helpen bij een klassikale discussie. De docent kan hieruit een keuze maken, al naar gelang de voortgang en de behoefte in de les. Als eindopdracht kan hoofdstuk 7 worden gebruikt of, als de leerlingen niet zo ver zijn gekomen, wellicht een van de eerdere hoofdstukken.

Hoofdstuk 1 Lijn door twee gegeven punten

Hele klas:

Introductie onderwerp computationeel denken, introductie GeoGebra.

Link naar video (3:26) ter illustratie van computationeel denken en het belang van het exact beschrijven van je stappen:

<https://fb.watch/45ZvJfAipp/>

Werk in kleine groepjes:

1.1 – 1.3 lijn door A(2,3) en B(6,2) opstellen, eerst op papier of in digitaal werkboek, daarna in GeoGebra.

Na 1.3 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het? Waar liep je tegenaan? Hoe kon je dat oplossen?

Hoe gaat het invoeren van commando's in GeoGebra?
Hoe was het om in 1.2 een stappenplan op te stellen en dat daarna in GeoGebra in te voeren?
Wat zou je doen als je hetzelfde zou willen doen voor andere punten A en B?
Hoe denk je dat je GeoGebra kunt gebruiken om een algemene oplossing te maken?

Werk in kleine groepjes:

1.4 – 1.5 lijn door $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$.

Na 1.5 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Waarom zou je het algemene geval willen aanpakken/nodig hebben (1.4)?
Hoe ga je het algemene geval aanpakken? Hoe maak je die stap van specifiek naar algemeen? Waarom? Wat is de winst tov de lijn door die twee vaste punten A(2,3) en B(6,2)? (Gehoopt antwoord: we hebben GeoGebra geleerd hoe het in het algemene geval zo'n lijn tekent.)
Hoe kun je zien of je oplossing werkt? Wanneer werkt het niet?
Hoe algemeen is die formule voor de lijn nou in 1.4/1.5? (bruggetje naar 1.6)

Werk in kleine groepjes:

1.6 – 1.7 gebruik als-dan-anders voor algemene oplossing.

Na 1.7 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het gebruik van het commando als-dan-anders?
Hoe kun je zien of je oplossing werkt?
Je hebt nu ook een oplossing voor het uitzonderingsgeval lijn A-B verticaal. Ben je nu echt klaar, is er nog een andere uitzondering? Hoe zit het met het horizontale geval?

(Gehoopt antwoord: twijfel, maar we hadden algemene oplossing + 1 uitzondering, dus we zijn klaar-> zekerheid. Horizontaal geval is gewoon helling = 0, dus valt onder het algemene geval.)

Hoofdstuk 2 Middelloodlijn

Werk in kleine groepjes:

2.1 – 2.3 middelloodlijn van lijnstuk AB met $A(2,3)$ en $B(6,2)$ opstellen, eerst op papier of in digitaal werkboek, daarna in GeoGebra.

Na 2.3 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het? Waar liep je tegenaan? Hoe kon je dat oplossen?
Hoe ging het opstellen in 2.2 van een stappenplan en dat daarna in GeoGebra invoeren?
Wat zou je doen als je hetzelfde zou willen doen voor een ander lijnstuk AB?
Hoe denk je dat je GeoGebra kunt gebruiken om een algemene oplossing te maken?

Werk in kleine groepjes:

2.4 – 2.5 middelloodlijn van lijnstuk AB met $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$.

Na 2.5 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het? Waar liep je tegenaan? Hoe kon je dat oplossen?
Waarom zou je het algemene geval willen aanpakken/nodig hebben (2.4)?
Hoe kun je zien of je oplossing werkt? Wanneer werkt het niet?

Werk in kleine groepjes:

2.6 – 2.7 gebruik als-dan-anders voor algemene oplossing.

Na 2.7 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het gebruik van het commando als-dan-anders?
Hoe kun je zien of je oplossing werkt?

Zijn er nog meer uitzonderingssituaties?
--

Hoofdstuk 3 Zwaartepunt

Werk in kleine groepjes:

3.1 – 3.3 zwaartepunt bepalen driehoek ABC met A(1,2), B(4,5) en C(3,-1), eerst op papier of in digitaal werkboek, daarna in GeoGebra.

Na 3.3 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het? Waar liep je tegenaan? Hoe kon je dat oplossen?
Hoe ging het opstellen in 3.2 van een stappenplan en dat daarna in GeoGebra invoeren?
Wat zou je doen als je hetzelfde zou willen doen voor een andere driehoek ABC?
Hoe denk je dat je GeoGebra kunt gebruiken om een algemene oplossing te maken?

Werk in kleine groepjes:

3.4 – 3.5 zwaartepunt bepalen van driehoek ABC met $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ en $C(x_C, y_C)$.

Na 3.5 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het? Waar liep je tegenaan? Hoe kon je dat oplossen?
Waarom zou je het algemene geval willen aanpakken/nodig hebben (3.4)? Of had je dat meteen al gedaan?
Waarom zou je in de wiskunde een algemene oplossing willen hebben? Wat doe je om het algemener te maken?
Hoe kun je zien of je oplossing werkt? Wanneer werkt het niet?

Werk in kleine groepjes:

3.6 – 3.7 test uitzonderingssituaties, controleren formule voor zwaartepunt.

Na 3.7 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe kun je zien of je oplossing werkt?
Kwam je uitzonderingssituaties tegen? Hoe heb je dat opgelost?

Klopte jouw oplossing met het gegeven zwaartepunt?

Hoofdstuk 4 Raaklijn aan een parabool

Werk in kleine groepjes:

4.1 – 4.2 vergelijking raaklijn bij $y=x^2$ opstellen in $x=1$, eerst op papier of in digitaal werkboek, daarna in GeoGebra.

Na 4.2 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het opstellen in 4.1 van een stappenplan en dat daarna in GeoGebra invoeren?

Wat zou je doen als je hetzelfde zou willen doen voor een andere parabool?

Hoe denk je dat je GeoGebra kunt gebruiken om een algemene oplossing te maken voor elke parabool?

Werk in kleine groepjes:

4.3 – 4.4 raaklijn aan parabool $y = ax^2 + bx + c$ in $x=1$ tekenen.

Na 4.4 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het? Waar liep je tegenaan? Hoe kon je dat oplossen?

Hoe krijg je zo'n stappenplan in GeoGebra ingebouwd? Is het precies hetzelfde als wanneer je het met pen-en-papier gedaan zou hebben?

Wat heb je gedaan om de aanpak algemeen te maken? Wat zijn voor- en nadelen daarvan?

Hoe kun je zien of je oplossing werkt?

Hoofdstuk 5 Bundels raaklijnen aan parabool

Werk in kleine groepjes:

5.1 – 5.2 vergelijking raaklijn aan parabool $y=x^2$ opstellen in (p, p^2) , eerst op papier of in digitaal werkboek, daarna in GeoGebra.

Na 5.2 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het? Waar liep je tegenaan? Hoe kon je dat oplossen?

Hoe ging het opstellen in 5.1 van een stappenplan en dat daarna in GeoGebra invoeren?
Wat zou je doen als je meerdere raaklijnen wil laten tekenen voor meerdere punten (p, p^2) ?
Hoe denk je dat je GeoGebra kunt gebruiken om een bundel raaklijnen te tekenen voor parabool $y=x^2$?

Werk in kleine groepjes:

5.3 – 5.4 gebruik rij-commando voor een bundel raaklijnen.

Na 5.4 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het gebruik van het rij-commando? Begrijp je hoe het werkt en wat je allemaal kunt invullen? Hoe formuleer je dat in gewone taal?
Hoe kun je zien of je oplossing werkt?
Wat zou je doen als je hetzelfde zou willen doen voor een andere parabool?
Hoe denk je dat je GeoGebra kunt gebruiken om een algemene oplossing te maken voor elke parabool?

Werk in kleine groepjes:

5.5 – 5.6 vergelijking raaklijn aan parabool $y = ax^2 + bx + c$ opstellen in (p, p^2) , eerst op papier of in digitaal werkboek, daarna in GeoGebra..

Na 5.6 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het aanpassen van het stappenplan?
Hoe ging het aanpassen van het rij-commando?
Hoe kun je zien of je oplossing werkt?

Hoofdstuk 6 Raaklijnen aan andere grafieken

In hoofdstuk 6 wordt het werk uit hoofdstuk 5 toegepast.

Werk in kleine groepjes:

6.1 – 6.3 bundels raaklijnen opstellen aan kromme $f(x) = \sqrt{x}$ in (p, \sqrt{p}) , eerst op papier of in digitaal werkboek, daarna in GeoGebra.

Na 6.3 klassikaal:

Discussie over het werk van de groepjes. Onderstaande vragen kunnen hierbij helpen.

Hoe ging het opstellen in 6.1 van een stappenplan en dat daarna in GeoGebra invoeren?
Wat moet je allemaal aanpassen voor een bundel bij een andere functie?
Hoe heb je opdracht 5 gebruikt?
Hoe ging het gebruik van het rij-commando?
Hoe kun je zien of je oplossing werkt?

Hoofdstuk 7 Eindopdracht

Als eindopdracht kan hoofdstuk 7 'Nulpunten met raaklijnen: Newton-Raphson' worden gebruikt. In hoofdstuk 7 heeft de leerling het bestand uit hoofdstuk 4 (opdracht 4.4) nodig.

Docentenlogboek

Les

Lesduur: ...

Datum: ...

Klas, docent: ...

Globale lesopbouw en inhoud:

Opvallende reacties van leerlingen:

Specifieke opmerkingen bij opgaven:

Terugblik: Waarover ben je tevreden en waarover minder tevreden?

Terugblik: Tip voor een collega die deze les nog gaat uitvoeren?

--