Functionele Algoritmes

lesmateriaal computationeel en wiskundig denken

Naam leerling: ____________________
Klas: ____________________
School: ____________________

Universiteit Utrecht

NRO
NATIONAAL REGIEORGAAN
ONDERWIJSONDERZOEK

Colofon

Dit lesmateriaal is ontwikkeld in het kader van het NRO langlopend onderwijsonderzoek “Computationeel en wiskundig denken”, projectnummer 40.5.18540.130.

Doelgroep: vwo-5 wiskunde B

Auteurs: Wim Caspers, Juan Dominguez, Paul Drijvers, Fetske Zwaga

Status: versie 2, 2 maart 2021

Inhoudsopgave

Computationeel denken met GeoGebra

Het ontwikkelen van computationele denkvaardigheden staat sterk in de belangstelling. In de wiskundeles kan dat goed samengaan met het bevorderen van het wiskundig denken. Computationeel denken wordt soms opgevat als 'denken als een computer'. Het is echter meer dan dat: het gaat vooral over het analytisch leren denken over manieren om complexe problemen aan te pakken. De volgende stappen zijn daarbij van belang:

1. Ontleding; het probleem moet in kleine stukjes opgedeeld worden en de kleine problemen stuk voor stuk opgelost;
2. Patronen herkennen;
3. Filteren van informatie; het vereenvoudigen van informatie; een schema of tekening van de informatie maken kan daarbij helpen;
4. Mogelijke oplossingen bedenken en uitproberen door algoritmisch te denken;
5. De oplossingen algemeen maken door toepassing bij overeenkomstige problemen.

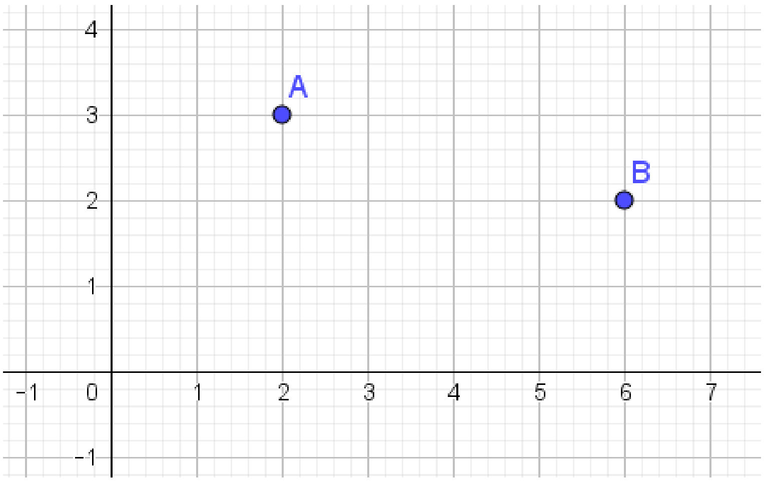
Daarmee is computationeel denken een vaardigheid die helpt om oplossingsmethoden zo te beschrijven dat ze kunnen worden opgelost door een computer. In deze lessenserie wordt een begin gemaakt met het ontwikkelen van deze computationele denkvaardigheden met behulp van het programma GeoGebra.

GeoGebra is wiskundesoftware die over de hele wereld veel wordt gebruikt. Het biedt allerlei wiskundige mogelijkheden, bijvoorbeeld voor het tekenen van grafieken, het oplossen van vergelijkingen en het bepalen van raaklijnen. De functionaliteit van GeoGebra gaat verder dan die van de grafische rekenmachine, omdat het ook computeralgebra aan boord heeft, een module die algebraïsche berekeningen exact kan uitvoeren.

Om te werken aan dit lesmateriaal heb je dus GeoGebra nodig. Op https://www.geogebra.org/classic kun je het programma (gratis) online gebruiken. Ook is het mogelijk om GeoGebra op je eigen computer te installeren, wat handig werkt. Ga hiervoor naar https://www.geogebra.org/download en kies voor 'Geogebra Klassiek 6'. Op de website kun je linksonder kiezen voor de Nederlandse taal.

GeoGebra werkt intuïtief, maar soms heb je wel een tip nodig. Daarom staat bij een aantal opgaven een **(T)**, die verwijst naar de tips in de tabel onder de opgave. Verder kun je zo nodig via je docent GeoGebra bestanden krijgen waarin een deel van het werk al is gedaan.

1. Lijn door twee gegeven punten



Hierboven zie je de punten $A(2,3)$ en $B(6,2)$.
We willen in GeoGebra een lijn door deze twee punten tekenen, maar wel met behulp van zelfgemaakte commando's. In GeoGebra zit de knop  waarmee je een lijn kan laten tekenen door twee punten. Die knop is door de programmeurs van GeoGebra gemaakt. Die gebruiken we dus niet, maar we gaan bedenken wat voor rekenwerk er achter de knop schuilgaat.

1.1 Open GeoGebra en voer punten A en B in. **(T)**
1.2 Schrijf hieronder de stappen op die je doet als je een vergelijking van de lijn door A en B opstelt.

- Gegeven zijn de punten en . De lijn door en heet .

- Zo bereken ik :

- Zo bereken ik :

- Dus

1.3 Voer in GeoGebra de gevonden vergelijking in van de lijn door A en B. **(T)**

Je hebt hierboven de lijn in GeoGebra door de punten $A(2,3)$ en $B(6,2)$ getekend. Als je de punten A en B verschuift, dan wijzigt de door jou ingevoerde lijn niet mee. We willen een vergelijking maken die afhankelijk is van de coördinaten van A en B, zodat als je de punten A en B versleept, de vergelijking mee verandert.

1.4 Schrijf hieronder de stappen op die je doet om een vergelijking van de lijn door $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ op te stellen.

- Gegeven zijn de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$. De lijn door en heet .

- Zo bereken ik :

$a = \dfrac{y_B - \ldots\ldots}{\ldots\ldots - \ldots\ldots}$ (1)

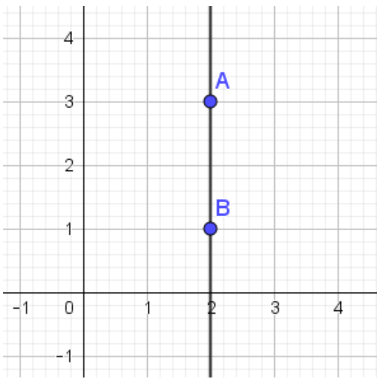
- Zo bereken ik :

  dus ………………………….. (2)

- Dus (1) …………………. (2) …………………

1.5 Voer in GeoGebra de vergelijking van deze lijn in, zodat die mee verandert als je de punten A en B versleept. Test of je oplossing werkt. De coördinaten van en voer je in als x(A), y(A), x(B) en y(B). Zie ook de tips **(T)**.

Er is nog één lastig geval over. Een verticale lijn, dus als A en B recht boven elkaar liggen, die heeft geen richtingscoëfficiënt.



Hiervoor kun je het ‘als-dan-anders’-commando uit de programmeerwereld gebruiken. Dit commando werkt zo: ALS *(de x-coördinaten gelijk zijn)* DAN *(is de vergelijking van de lijn …)* en ANDERS *(is de vergelijking van de lijn …).*

1.6 Schrijf hieronder de juiste vergelijkingen op de stippellijnen.

ALS ………………. DAN ………………….. ANDERS ……………..…………

1.7 Pas je GeoGebra bestand zo aan, dat ook in dit uitzonderingsgeval de lijn door A en B wordt getekend. Gebruik hiervoor het ‘als-dan-anders’-commando in GeoGebra. En test natuurlijk weer of het werkt. **(T)**

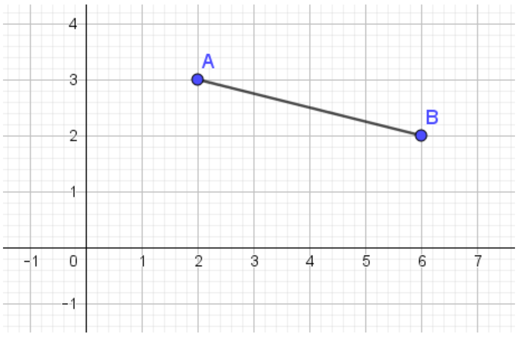
1.8 Waarom is het handig om een oplossing te maken voor algemene punten A en B?

1.9 Wat heb je gedaan om te controleren of je oplossing werkt voor alle gevallen?

Tips (T)

Wat wil je doen?	Hoe doe je dat in GeoGebra?
De coördinaat A(2,3) opgeven	Voer in de invoerregel in: A = (2,3)
Een vergelijking invoeren, bijvoorbeeld y = 3x.	Voer in de invoerregel in: y = 3x
invoeren	Typ in de invoerregel: y=1/4 +7/2 (met “” kom je uit de noemer van weg)
De x-coördinaat van punt A gebruiken.	Voer in de invoerregel in: x(A)
Een voorwaardelijke definitie invoeren, bijvoorbeeld als x(A)=x(B) is de uitkomst P en anders Q.	Voer in de invoerregel in: ALS(x(A)==x(B), P, Q)
Een verticale lijn laten tekenen, bijvoorbeeld x=3.	Voer in de invoerregel in: x=3

2. Middelloodlijn



Hierboven zie je het lijnstuk door de twee punten $A(2,3)$ en $B(6,2)$. We willen in GeoGebra de middelloodlijn van lijnstuk AB tekenen, maar wel met behulp van zelfgemaakte commando's. In GeoGebra zit de knop  die een middelloodlijn kan tekenen. We gebruiken die knop niet, maar gaan bekijken wat voor rekenwerk er achter de knop schuilgaat.

2.1 Voer in GeoGebra de punten A en B in en teken het lijnstuk AB. **(T)**

2.2 Schrijf hieronder de stappen op die je doet om een vergelijking van de middelloodlijn van lijnstuk AB op te stellen.

- Gegeven zijn de punten en . De middelloodlijn van lijnstuk heet .
- Het midden van lijnstuk heet en heeft coördinaten
- Zo bereken ik :
- Zo bereken ik
- Dus …

(Als je liever met vectoren werkt, gebruik dan als normaalvector van .)

2.3 Voer in GeoGebra de gevonden vergelijking van de middelloodlijn van lijnstuk AB in.

Je hebt hierboven de middelloodlijn in GeoGebra van het lijnstuk AB getekend met $A(2,3)$ en $B(6,2)$. Misschien heb je dat al op zo'n manier gedaan dat als de punten A en B verschuiven, dat dan de door jou ingevoerde middelloodlijn mee verandert.

Je hebt dan in de formules die je invoerde in GeoGebra gewerkt met , , en . Als je daar niet mee gewerkt hebt, maak dan onderstaande opdracht.

2.4 Schrijf hieronder de stappen op die je doet om een vergelijking van de middelloodlijn van lijnstuk AB met $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ op te stellen.

- Gegeven zijn de punten en . De middelloodlijn van lijnstuk heet .

- Het midden van lijnstuk heet en heeft coördinaten

- Zo bereken ik :

  $rc_{AB} = \dfrac{y_B - ......}{......-......}$

  dus …………………… (1)

- Zo bereken ik :

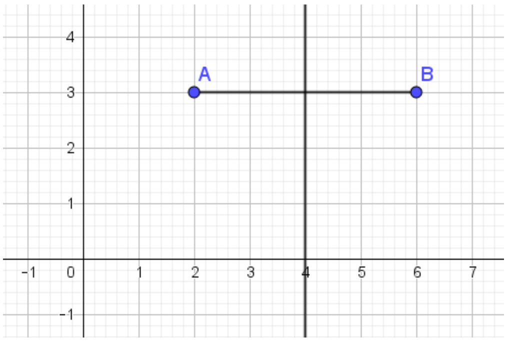
  dus ………………… (2)

- Dus (1) …………………. (2) …………………

  (Als je liever met vectoren werkt, gebruik dan als normaalvector van .)

2.5 Voer in GeoGebra de vergelijking van deze lijn in, zodat die mee verandert als je de punten A en B versleept. Test of je oplossing werkt.

Net als in de vorige opdracht leveren verticale lijnen een probleem op. Bij een horizontaal lijnstuk AB heeft de middelloodlijn geen richtingscoëfficiënt.



Hiervoor gebruiken we weer het ‘als-dan-anders’-commando.

2.6 Schrijf hieronder de juiste vergelijkingen op de stippellijnen.

ALS ………………. DAN ………………….. ANDERS ……………..…………

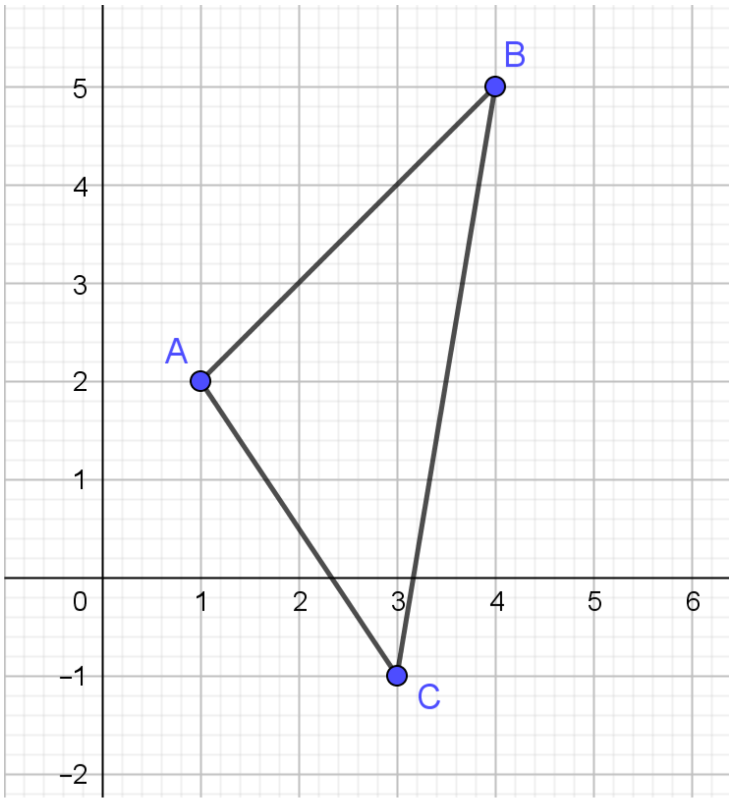
2.7 Pas je GeoGebra-bestand zo aan, dat ook in dit uitzonderingsgeval de middelloodlijn van lijnstuk AB wordt getekend. En test natuurlijk weer *of* het werkt.

Tips (T)

Wat wil je doen?	***Hoe doe je dat in GeoGebra?***
Het lijnstuk AB tekenen	Voer in de invoerregel in: Lijnstuk(A,B)

3. Zwaartepunt

Het snijpunt van de zwaartelijnen van een driehoek is het zwaartepunt. Een zwaartelijn gaat door een hoekpunt en het midden van de tegenoverliggende zijde.



Hierboven zie je de driehoek ABC met $A(1,2)$, $B(4,5)$ en $C(3,-1)$. We willen in GeoGebra het zwaartepunt van driehoek ABC tekenen met behulp van zwaartelijnen. GeoGebra kent het commando zwaartepunt(veelhoek(A,B,C)) waarmee je het zwaartepunt van driehoek ABC kan tekenen. We gebruiken dit commando niet, maar gaan onderzoeken welke berekeningen er nodig zijn.

3.1 Voer in GeoGebra de punten A, B en C in en teken de driehoek ABC. **(T)**

3.2 Schrijf hieronder de stappen op die je doet om een vergelijking van de zwaartelijn door hoekpunt A op te stellen.

- Gegeven is driehoek met en en . De zwaartelijn door hoekpunt heet .

- Het midden *K* van lijnstuk *BC* heeft als coördinaten .

- Zo bereken ik :

  …………

- Zo bereken ik :

- Dus ……..

3.3 Voer in GeoGebra de vergelijkingen in van de drie zwaartelijnen van driehoek ABC. Het is daarbij handig om de middens van zijdes , en respectievelijk , en te noemen en die middens ook in te voeren in GeoGebra.

Je hebt hierboven het zwaartepunt in GeoGebra van driehoek ABC getekend met $A(1,2)$, $B(4,5)$ en $C(3,-1)$. Misschien heb je al ingebouwd en verandert het door jou berekende zwaartepunt mee als de punten A, B en C verschuiven. Als je daar geen rekening mee hebt gehouden, maak dan de volgende opdracht

3.4 Schrijf hieronder de stappen op die je doet om een vergelijking van de zwaartelijn door hoekpunt van driehoek op te stellen met en en .

- De zwaartelijn door hoekpunt heet .
- Het midden *K* van lijnstuk *BC* heeft als coördinaten .
- Zo bereken ik :

  …………

- Zo bereken ik :
- Dus ……..

  (Als je liever met vectoren werkt dan kun je als normaalvector van lijn een vector loodrecht op kiezen.)

3.5 Implementeer je werkwijze hierboven in GeoGebra. Doe dit ook voor de zwaartelijnen door B en C (gebruik kopiëren en plakken) en pas je functie zo aan, dat die blijft werken als je de punten A, B en C versleept. Test of je oplossing werkt! (Het weer handig om de middens van zijdes , en respectievelijk , en te noemen en die middens ook in te voeren in GeoGebra.)

3.6 Misschien loop je er bij opdracht 3.6 tegenaan dat verticale zwaartelijnen niet getekend worden. Die hebben immers geen richtingscoëfficiënt. Dat geval doet zich voor als bijvoorbeeld. Net als in opdracht 2.6 kan dat gerepareerd worden door het ‘als-dan-anders’-commando te gebruiken. Voer die reparatie uit als je in opdracht 3.6 geen rekening gehouden had met verticale zwaartelijnen. (Als je met vectoren werkt, dan heb je dat probleem trouwens niet.)

Het zwaartepunt Z is ook te berekenen met $Z\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3},\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

3.7 Voer dit punt in GeoGebra in en controleer of dit het snijpunt is tussen de drie zwaartelijnen.

Tips (T)

Wat wil je doen?	***Hoe doe je dat in GeoGebra?***
Een driehoek ABC tekenen	Voer in de invoerregel in: Veelhoek(A,B,C)

Intermezzo: de vergelijking van een lijn

In het vervolg wordt gebruik gemaakt van een vorm van een vergelijking van een lijn die je misschien niet gewend bent. Deze vorm opstellen werkt sneller in ons geval en zal je veel intypwerk besparen.

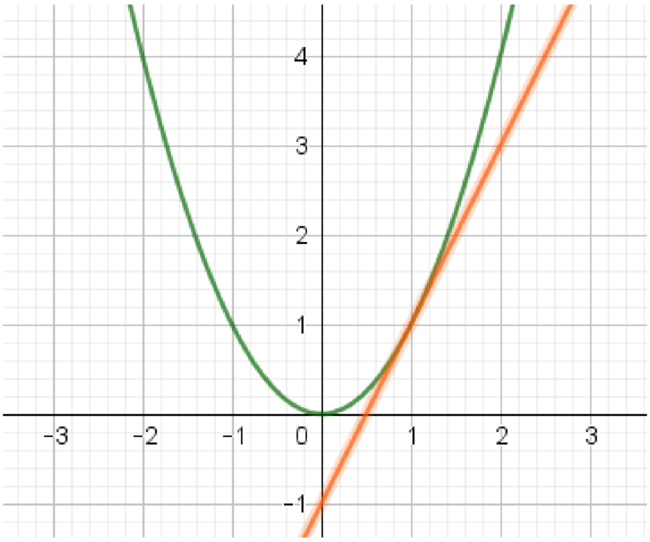
Stel je zoekt bijvoorbeeld een vergelijking van de lijn met richtingscoëfficiënt door het punt . Je bent waarschijnlijk gewend om uit te gaan van om vervolgens de coördinaten van te gebruiken om te bereken.

De andere, nieuwe manier is als volgt:

Een vergelijking van de lijn door de oorsprong met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ is $y=-\frac{1}{2}x$. Als deze lijn door het punt $A(2,3)$ moet gaan, kan de lijn $y=-\frac{1}{2}x$ twee naar rechts en 3 omhoog verschoven worden. De vergelijking $y=-\frac{1}{2}(x-2)+3$ volgt hieruit dus eenvoudig.

De vergelijking van een lijn met richtingscoëfficiënt m door het punt (p,q) is .

4. Raaklijn aan een parabool



Hierboven zie je de parabool met vergelijking $y = x^2$ en de raaklijn daaraan voor $x = 1$. We willen in GeoGebra deze raaklijn tekenen, maar zonder de ingebouwde commando's zoals de knop  of het GeoGebra-commando Afgeleide te gebruiken.

4.1 Schrijf hieronder de stappen op die je doet om een vergelijking van de raaklijn op te stellen.

- Stel is de raaklijn aan de grafiek van $y = x^2$ in het punt met .
- …..
- …..
- …..
- Dus ….. ….. (en dus ….. …..)

4.2 Voer in GeoGebra je resultaat in en laat de raaklijn tekenen. **(T)**

Nu willen we ook graag dat deze procedure werkt voor elke parabool met vergelijking .

4.3 Pas hieronder je stappenplan zo aan, dat de raaklijn aan de parabool in $x=1$ steeds getekend wordt, ook als je de waarden van , en verandert. **(T)**

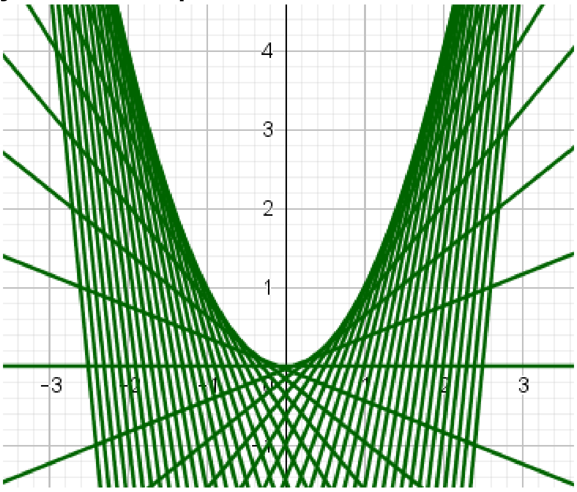
- Stel is de raaklijn aan de grafiek van in het punt met .
- …..
- …..
- …..
- Dus …..

4.4 Voer in GeoGebra je resultaat in en laat de raaklijn tekenen voor zelfgekozen waarden van , en . Test of je oplossing werkt. Later ga je dit ggb-bestand nog gebruiken. **(T)**

Tips (T)

Wat wil je doen?	***Hoe doe je dat in GeoGebra?***
Een vergelijking van een kwadratische functie invoeren.	Voer in de invoerregel in: y = ax^2+bx+c (schuifbalken voor a, b en c aan laten maken)
Een vergelijking van een lijn met RC 2 door het punt (3, 4) invoeren	Voer in de invoerregel in: y=2*(x-3) + 4
Een schuifbalk voor een parameter a maken	Voer in de invoerregel in: a
De waarde van een parameter a veranderen	Sleep aan het punt op de schuifbalk van a

5. Bundels raaklijnen aan parabool



In de vorige opdracht heb je GeoGebra een raaklijn aan een parabool laten tekenen. Andersom kun je een parabool ook in beeld krijgen door een hele bundel van raaklijnen te laten tekenen. Hierboven zie je dat voor de parabool met vergelijking $y = x^2$. De bedoeling is nu weer om dit in GeoGebra te doen. Daarbij komt je werk aan de vorige opdracht goed van pas.

5.1 Maak in het kader hieronder een stappenplan voor het opstellen van de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y = x^2$ in het punt A met coördinaten (p, p^2). Je resultaat zal een formule zijn waarin de parameter voorkomt.

- Stel is de raaklijn aan de grafiek van $y = x^2$ in het punt (p, p^2).
- …..
- …..
- Dus ….. ….. (1)

5.2 Voer in GeoGebra je resultaat in en laat de raaklijn tekenen voor enkele zelfgekozen waarden van p. **(T)**

Om nu een bundel raaklijnen te laten tekenen kunnen we het commando RIJ gebruiken. De syntax hiervan is:

RIJ(<Uitdrukking>, <Variabele>, <van>, <tot>, <toename>)

In ons geval maakt dit commando een ‘rij’ raaklijnen aan de grafiek in telkens andere raakpunten.

- <Uitdrukking>: hier vul je de ‘algemene’ vergelijking (1) voor de raaklijn zoals gevonden bij het vorige onderdeel.
- <Variabele>: aangezien je voor telkens een andere waarde van p raaklijnen wilt, is de variabele hier p.
- <van>/<tot>/<toename>: hier geef je aan in welk punt p je wilt beginnen en in welk punt je wilt eindigen, bij een zelfgekozen ‘toename (stapgrootte)’. Zo zal …,1,9,2) in totaal vijf raaklijnen opleveren in de punten $x=1$, $x=1+2=3$, …, $x=9$.

5.3 Vul in het kader hieronder in welke elementen van het RIJ commando je moet gebruiken om een bundel van 50 raaklijnen aan de parabool te tekenen van $p=-5$ tot en met $p=5$:

<Uitdrukking>: ……………………………………………………………………..

<Variabele>: ………………………………………………………………………

<van>: ……………………………………………………………………………..

<tot>: ………………………………………………………………………………...

<toename>: ……………………………..………………………………………

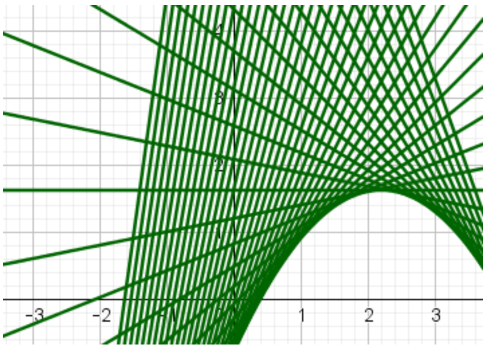
5.4 Voer het RIJ-commando in GeoGebra in en teken zo een bundel raaklijnen. **(T)**

Een volgende uitdaging is om deze aanpak ook te laten werken voor andere parabolen. Het schema bij opgave 3 verandert niet, maar het stappenplan van opgave 1 wel.

5.5 Pas het stappenplan van opgave 5.1 aan voor een parabool met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.

- Stel is de raaklijn aan de grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ in het punt .
-
- Dus ….. …..

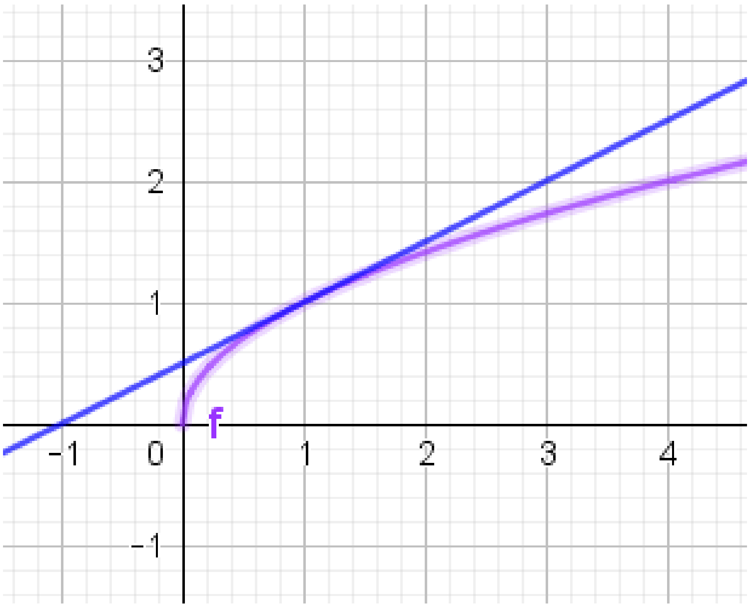
5.6 Pas het RIJ-commando in GeoGebra aan voor het algemene geval en teken zo een bundel raaklijnen aan een andere parabool. Blijft het werken als je de waarden van a, b en/of c verandert? **(T)**



Tips (T)

Wat wil je doen?	*Hoe doe je dat in GeoGebra?*
Een vergelijking van een lijn met RC 2 door het punt (3, 4) invoeren	Voer in de invoerregel in: 2*(x-3) + 4
Een bundel grafieken laten tekenen, bijvoorbeeld die van *y* = *ax*+3 voor *a* = 1, 2, …., 10	Voer in de invoerregel in: RIJ(ax+3,a,1,10,1)

6. Raaklijnen aan andere grafieken



In opdracht 5 heb je bundels raaklijnen aan parabolen getekend. Nu gaan we ditzelfde doen bij andere krommen, zoals bijvoorbeeld de grafiek van de wortelfunctie hierboven. Daarbij voeren we in en nu staan we onszelf toe om de GeoGebra-invoer $f\,'(p)$ te gebruiken, die de waarde van de afgeleide van een functie f voor $x = p$ geeft.

6.1 Pas het stappenplan van de vorige opdracht aan voor de grafiek van de functie .

- Stel is de raaklijn aan de grafiek van   in het punt .
-
-
- Dus ….. ….

6.2 Hoe ziet het RIJ-commando er in dit geval uit? Vul het schema in.

<Uitdrukking>: ……………………………………………………………………..

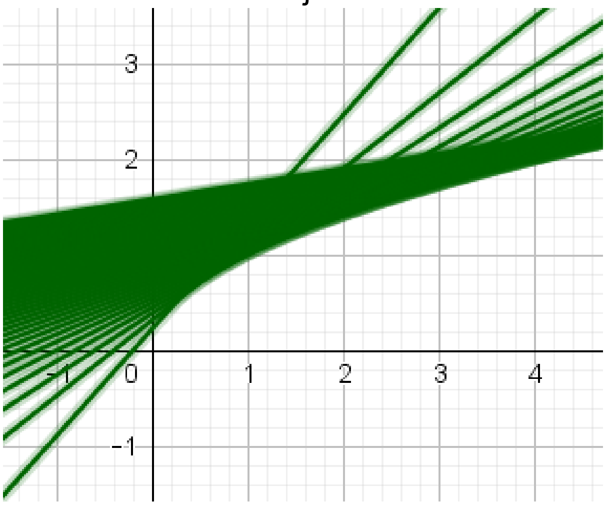
<Variabele>: ……………………………………………………………………

<van>: ……………………………………………………………………………..

<tot>: …………………………………………………………………………...

<toename>: ………………………………..………………………………………

6.3 Voer bovenstaande in GeoGebra in en laat de grafiek van de wortelfunctie “omhullen” door een bundel van raaklijnen.

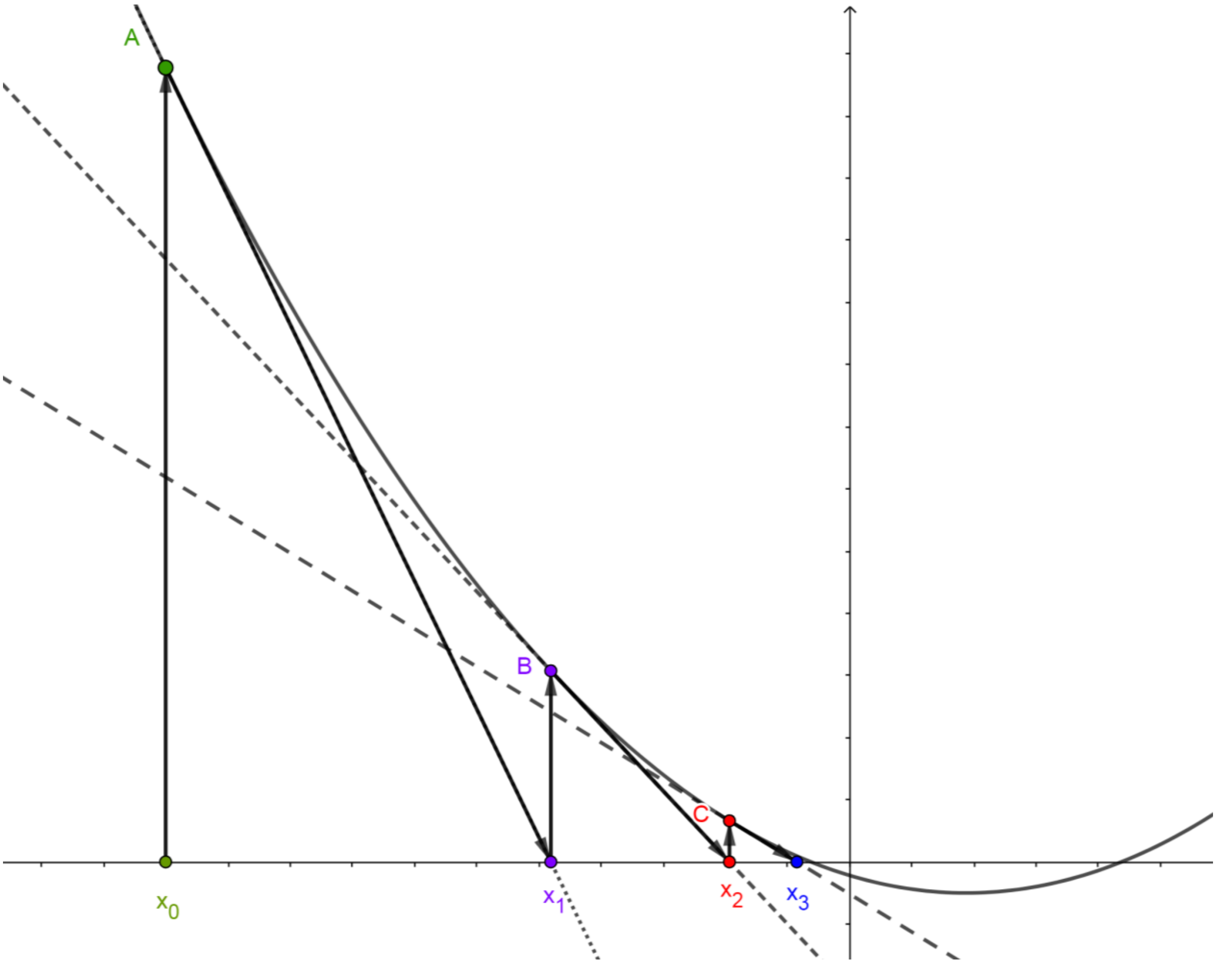


6.4 Kies zelf enkele andere functies en maak daarvoor ook dergelijke plaatjes.

Tips (T)

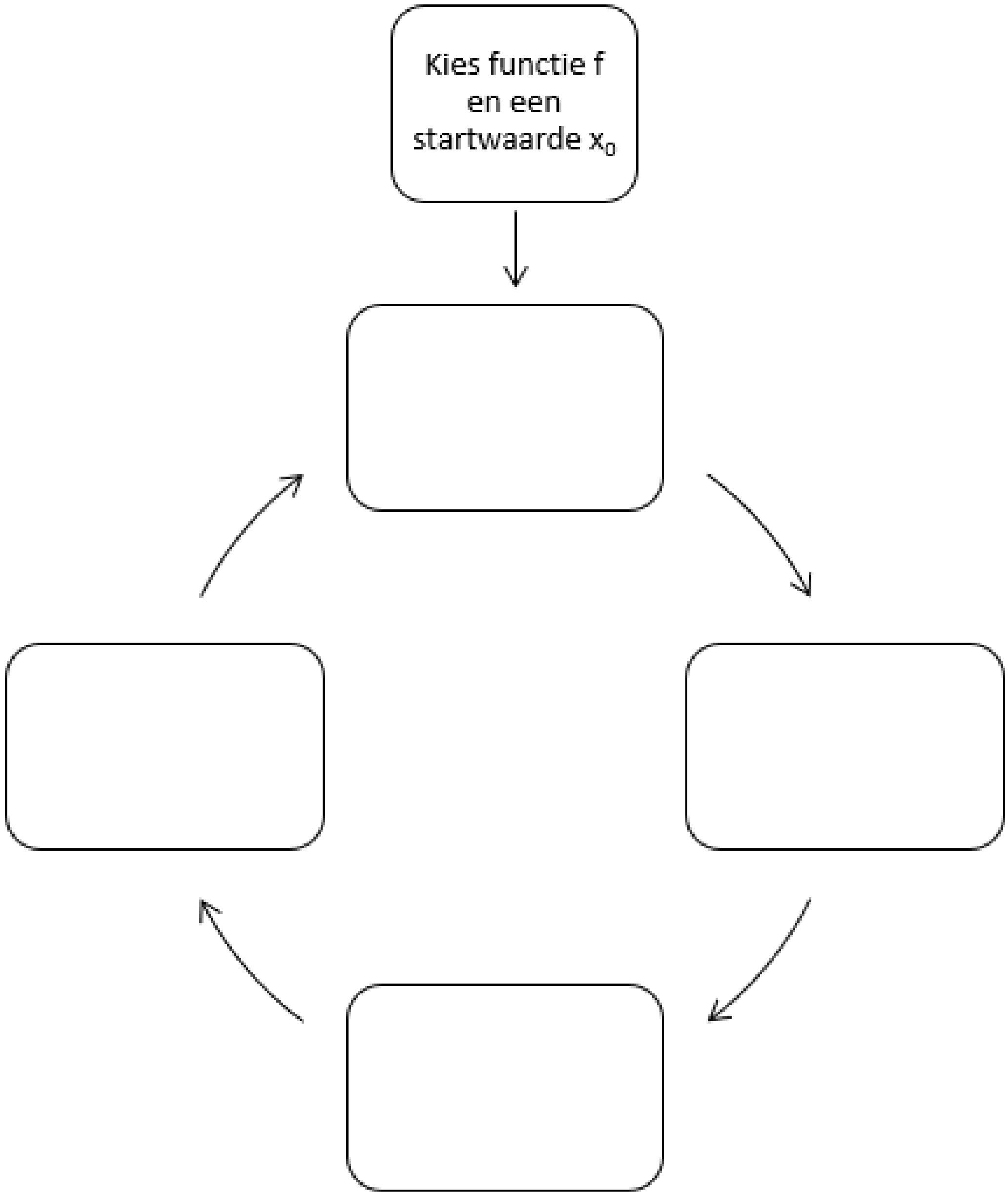
Wat wil je doen?	***Hoe doe je dat in GeoGebra?***
Een vergelijking van een lijn met RC 2 door het punt (3, 4) invoeren	Voer in de invoerregel in: 2*(x-3) + 4
De functie invoeren	Voer in de invoerregel in: f(x)=sqrt x
De afgeleide waarde van een functie *f* voor $x = p$ bepalen	Voer in de invoerregel in: f’(p)
Een bundel grafieken laten tekenen, bijvoorbeeld die van $y = ax + 3$ voor $a = 1$, 2, …., 10	Voer in de invoerregel in: RIJ(ax+3,a,1,10,1)

7. Nulpunten met raaklijnen: Newton-Raphson



In een vorige opdracht heb je GeoGebra een raaklijn aan een parabool laten tekenen. Het tekenen van raaklijnen wordt gebruikt bij het benaderen van nulpunten op de manier die je hierboven ziet in de grafiek van . De methode is bekend onder de naam Newton-Raphson. In veel gevallen werkt het erg goed. In een aantal stappen – je ziet er drie getekend – wordt het nulpunt benaderd. De snijpunten van raaklijnen met de x-as zouden het nulpunt steeds nauwkeuriger moeten benaderen door vervolgens , , enzovoort te construeren.

7.1 Beschrijf hoe de methode Newton-Raphson in elkaar zit. Gebruik daarvoor het onderstaande schema. Beschrijf het zo dat iemand die niet bekend is met de methode jouw stappen kan volgen en tot een oplossing kan komen.



Met deze methode zou je bijvoorbeeld de nulpunten van de parabool $f(x) = x^2 - 2$ kunnen benaderen. Je benadert dan dus $\sqrt{2}$ of $-\sqrt{2}$. Met pen en papier is dat redelijk bewerkelijk. Daarom beperken we ons tot de eerste twee stappen om $\sqrt{2}$ te benaderen. Als we de notatie uit de grafiek hierboven aanhouden gaan we dus op zoek naar x_1 en x_2 en gebruiken daarvoor de punten A en B. De startwaarde x_0 mogen we kiezen.

7.2 Voer de volgende stappen uit:

a. Neem $f(x) = x^2 - 2$ en als startwaarde $x_0 = 4$. A is het punt van de grafiek van *f* met *x*-coördinaat $x_A = 4$. Geef de coördinaten van punt A.

b. Stel een vergelijking op van de raaklijn l_A aan de grafiek van *f*.

c. Bepaal het snijpunt van l_A met de *x*-as en noem de *x*-coördinaat van dat snijpunt x_1.

d. B is het punt van de grafiek van *f* met *x*-coördinaat . Geef de coördinaten van punt B.

e. Stel een vergelijking op van de raaklijn l_B aan de grafiek van *f*.

f. Bepaal het snijpunt van l_B met de *x*-as en noem de *x*-coördinaat van dat snijpunt x_2.

Om een betere benadering van $\sqrt{2}$ te vinden zouden we het proces vaker moeten herhalen. Tijd om de hulp van GeoGebra in te roepen.

7.3 Pas in bestand uit paragraaf 4, opdracht 4.4 de parabool aan door $a=1$, $b=0$ en $c=-2$ te kiezen. Voer als startwaarde $x_0=4$ in. **(T)**

7.4 Startpunt A op de grafiek van *f* heeft dan coördinaten $(x_0, f(x_0))$. Voer in $A=(x_0, f(x_0))$.

7.5 Om de raaklijn aan de grafiek van f in het punt A te laten tekenen pas je de formule van de raaklijn in het bestand aan door in plaats van als *x*-coördinaat van A te gebruiken.

7.6 De -coördinaat van A speelt de rol van x_0. Je vindt x_1 door het snijpunt te bepalen van de raaklijn en de x-as. is de -coördinaat van dat snijpunt. Ga na dat $x_1 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$. Voer in en vervolgens punt .

Met punt B in de hand zouden eigenlijk stap 7.4, 7.5 en 7.6 nog een keer uitgevoerd moeten worden waar de rol van A overgenomen wordt door B om zo en punt te vinden. Door herhaling wordt steeds een nieuw punt gevonden.

In GeoGebra kun je de stappen 7.4, 7.5 en 7.6 bij elkaar nemen in een zogenaamde “macro”. Je maakt dan een nieuw commando (laten we het “NR” noemen), dat oplevert als je NR(f,) invoert, als je NR(f,) invoert, enzovoorts. In het algemeen: NR(f,) geeft de -coördinaat van het snijpunt van de raaklijn in aan de grafiek van f met de x-as.

7.7 Kies in het keuzemenu voor “Knoppen” (of in het menu voor “Macro’s”, afhankelijk van je GeoGebra-versie) en dan “Nieuwe macro aanmaken”.

Kies als eindobject x_1 en als beginobject x_0 en f. Geef de macro de naam “NR”.
Je kunt ook een eigen plaatje kiezen om de knop NR in je knoppenbalk weer te geven. Klik op “Beëindigen om je macro aan te maken.

Lukt het de eerste keer niet, gooi de foute macro weg en begin opnieuw.

7.8 Met het commando Iteratielijst kun je de macro “NR” herhalen ofwel itereren. Dat doe je met het commando Iteratielijst(NR(X,f),X,{},5). Het commando voert 5 keer achter elkaar NR uit met de grafiek van f en het begint met x-coördinaat x_0. De hoofdletter X is de variabele waar steeds de nieuwgevonden x-coördinaat wordt ingevuld. Krijg je zo inderdaad een benadering van $\sqrt{2}$?

7.9 Kun je door een kleine verandering ook het andere nulpunt benaderen?

7.10 Kun je door a, b, c en x_0 aan te passen ook de gulden snede $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ benaderen? Bedenk eerst (of zoek op) van welke vergelijking de gulden snede een nulpunt is.

7.11 De methode van Newton-Raphson werkt niet in alle gevallen. Of je een nulpunt vindt en welk hangt af van je functie *f* en vooral ook van de startwaarde x_0 die je kiest. Onderzoek wat het effect is als je startwaarde verandert en probeer een voorbeeld te vinden waar de methode vreselijk fout afloopt.

Tips (T)

Wat wil je doen?	***Hoe doe je dat in GeoGebra?***
Variabele =4 invoeren	Voer in de invoerregel in: x_0=4
Een vergelijking van de raaklijn opstellen aan de grafiek van *f* in het punt $A(x_0, f(x_0))$	Voer in de invoerregel in: in plaats van
Het snijpunt bepalen van de raaklijn en de x-as	Voer in de invoerregel in:
Een macro maken die een stap van Newton-Raphson uitvoert	Kies in het keuzemenu onder “knoppen” voor “nieuwe macro aanmaken” Of in het menu voor “Macro’s” en dan “macro aanmaken”
Een aantal keer dezelfde stap uitvoeren	Voer in de invoerregel in: Iteratielijst(NR(X,f),X,{ },5)