

---

---

**WISKUNDE-ESTAFETTE 2010**

**Uitwerkingen**

---

---

**1**

We tellen het aantal donkere tegels in elke rij.

Rij 1 (en rij 19) bestaat uit 10 witte tegels.

Rij 2 (en rij 18) bestaat uit 11 tegels, waarvan 6 wit en 5 donker.

Rij 3 (en rij 17) bestaat uit 12 witte tegels.

Rij 4 (en rij 16) bestaat uit 13 tegels, waarvan 7 wit en 6 donker.

Rij 5 (en rij 15) bestaat uit 14 witte tegels.

Rij 6 (en rij 14) bestaat uit 15 tegels, waarvan 8 wit en 7 donker.

Rij 7 (en rij 13) bestaat uit 16 witte tegels.

Rij 8 (en rij 12) bestaat uit 17 tegels, waarvan 9 wit en 8 donker.

Rij 9 (en rij 11) bestaat uit 18 witte tegels.

Rij 10 bestaat uit 19 tegels, waarvan 10 wit en 9 donker.

In totaal zijn dat  $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 61$  donkere tegels.

**2**

We kunnen de vraagtekens van links naar rechts kolom voor kolom invullen.

Na enig gerekend levert dit het volgende op:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	2	4	2	1	3	2	3	1		
		1	7	7	1	2	5	5	2	1	
	<b>1</b>		3	12	3	1	3	12	3	<b>1</b>	
1		2		5	5	2	1	7	7	1	
	1		3		2	3	1	2	4	2	1
1		1		1		1		1		1	

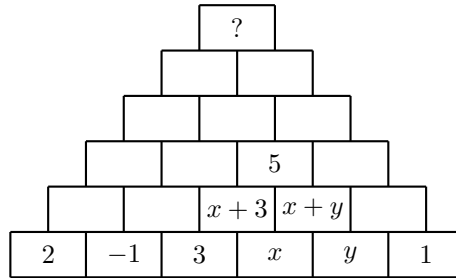
Je ziet een zig-zag van enen ontstaan 8 plaatsen rechts van de gegeven zig-zag van enen.

Daaruit volgt dat het hele patroon van getallen zich van daar af herhaalt. In het bijzonder staat hetzelfde getal zowel 150 plaatsen naar rechts als 142 plaatsen naar rechts als ..... als  $150 - 18 \times 8 = 6$  plaatsen naar rechts van de gemarkeerde 1, namelijk een 12.

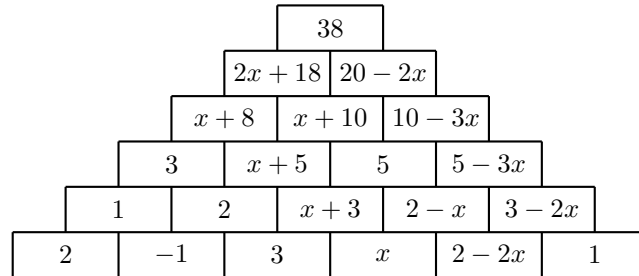
Overigens heeft de figuur veel meer symmetrie dan bovengenoemde schuif-symmetrie: er is een spiegel-symmetrie ten opzichte van de verticale lijn door de 12, en een spiegel-symmetrie ten opzichte van het punt midden tussen beide gemarkeerde enen.

**3**

Als we  $x$  en  $y$  schrijven voor de getallen die moeten komen staan op de stenen van de onderste rij, dan kunnen we naar de 5 toewerken:



Hieruit blijkt dat moet gelden  $(x+3) + (x+y) = 5$  en dus  $y = 2 - 2x$ . Vullen we dat in en werken we helemaal naar boven dan blijkt dat het getal op de bovenste steen helemaal niet van  $x$  afhangt:



4

Schrijf  $x$  voor het getal dat gevormd wordt door de eerste vijf cijfers.

Dan is  $n = 10x + 7$  en  $5n = 700000 + x$ , dus  $50x + 35 = 700000 + x$ , dus  $49x = 699965$ , dus  $x = 14285$ . Daaruit volgt dat  $n = 142757$ .

5

Als je minder dan drie briefjes van 20 gebruikt, dan moet je een bedrag dat geen veelvoud van 50 euro is betalen in briefjes van 50 en van 100, en dat gaat niet. Zo zien we dat we in ieder geval 3 briefjes van 20 euro en 1 briefje van 50 euro moeten gebruiken. Nu moeten we nog 1900 euro betalen in briefjes van 20 en 50 en 100 euro.

Als het aantal briefjes van 20 euro dat we daarvoor gebruiken geen vijfvoud is, dan moeten we weer een onmogelijk bedrag in briefjes van 50 en van 100 euro betalen. Zo zien we dat het aantal briefjes van 20 dat we nog moeten uitgeven een vijfvoud is, en het aantal briefjes van 50 een tweevoud. Het komt er op neer dat we 1900 euro moeten betalen met drie soorten eenheden van 100 euro, namelijk stapeltjes van vijf briefjes van 20 euro, stapeltjes van twee briefjes van 50 euro, en losse briefjes van 100 euro. In formule: we zoeken het aantal oplossingen van  $x + y + z = 19$  met  $x$  en  $y$  en  $z$  geheel en  $\geq 0$ .

Voor  $z = 0$  zijn er 20 mogelijkheden, namelijk  $x = 0, 1, 2, \dots, 19$ . Voor  $z = 1$  zijn er 19 mogelijkheden namelijk  $x = 0, 1, 2, \dots, 18$ . En zo maar door. Het totale aantal mogelijkheden is dus  $20 + 19 + \dots + 2 + 1 = (20 + 1) + (19 + 2) + \dots + (11 + 10) = 10 \times 21 = 210$ .

6

Schrijf  $n$  als  $k^2$  met  $k$  geheel. Als  $k \leq 430$ , dan is  $k^2 \leq 430^2 = 184900$  en begint dus niet met  $19 \dots$ . Als  $k \geq 450$ , dan is  $k^2 \geq 450^2 = 202500$  en begint dus ook niet met  $19 \dots$ .

Dus  $k$  begint met  $43 \dots$  of  $44 \dots$ .

Als  $k$  op een 9 eindigt, zeg  $k = 10j + 9$  met  $k$  geheel dan is  $k^2 = 100j^2 + 180j + 81$  en dus eindigt  $k^2$  op een 1; hetzelfde is het geval als  $n$  op een 1 eindigt. Als  $k$  op een 2 of 8 eindigt, dan eindigt  $k^2$  op een 4. Als  $k$  op een 3 of 7 eindigt, dan eindigt  $k^2$  op een 9. Ten slotte als  $k$  op een 0 of 5 eindigt, dan doet  $k^2$  dat ook.

Dus kan  $k$  alleen op 4 of 6 eindigen, en moet dus 434 of 436 of 444 of 446 zijn. Een kleine berekening laat zien dat alleen 444 voldoet.

7

Na  $t$  uren heeft de eerste maan  $t/101$  omlopen voltooid, de tweede maan  $t/203$  en de derde maan  $t/306$ . Er is een samenstand als die getallen gelijk zijn op een geheel getal na, dus als

$$\frac{t}{101} = a + k, \quad \frac{t}{203} = a + \ell, \quad \frac{t}{306} = a + m$$

voor zekere gehele  $k, \ell, m$  en voor zekere  $a$  tussen 0 en 1. Hieruit volgt dat

$$k - \ell = \frac{102}{101 \cdot 203}t, \quad k - m = \frac{205}{101 \cdot 306}, \quad \text{en dus} \quad \frac{k - \ell}{k - m} = \frac{102 \cdot 306}{203 \cdot 205}$$

Omdat die laatste breuk niet meer te vereenvoudigen is, moet er een geheel getal  $j$  zijn met

$$k - \ell = 102 \cdot 306j, \quad \text{en} \quad k - m = 203 \cdot 205j, \quad \text{en dus} \quad t = 101 \cdot 203 \cdot 306j$$

Na de samenstand bij het begin van de jaartelling (waarbij  $j = 0$ ) is de eerstvolgende samenstand die met  $j = 1$ , dus met  $t = 101 \cdot 203 \cdot 306 = 6273918$  uren. Dat zijn 250956 dagen en 18 uren, oftewel 627 jaren en 156 dagen en 10,5 uren. De samenstand vindt dus plaats in het jaar 628.

8

Schrijf  $x$  voor de lengte van de schuine zijde van de driehoek. Dan is dat de lengte van de basis, dus de hoogte is  $\frac{1}{2}x$  en de oppervlakte is  $\frac{1}{4}x^2$ . Beide uit-stekende delen van het trapezium zijn ook gelijkbenige rechthoekige driehoekjes, met  $\frac{1}{2}(x - 1)$  als lengte van de rechthoekzijde. Dus is  $\frac{1}{2}(x - 1)$  de hoogte van het trapezium, terwijl het gemiddelde van de lengtes van de parallelle zijden  $\frac{1}{2}(x + 1)$  bedraagt. De oppervlakte van het trapezium is dus het product  $\frac{1}{4}(x^2 - 1)$ .

We vinden dus dat  $\frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{4}(x^2 - 1)$ , dus  $2x^2 = 3$ , dus  $x = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ . De hoogte  $h$  is de som van  $\frac{1}{2}(x - 1)$  en  $\frac{1}{2}x$ , dus  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$ .

9

Schrijf  $k$  voor het aantal medailles dat nog voorradig is op de voorlaatste dag na het uitreiken van de  $n - 1$  medailles, maar vóór het uitreiken van het  $1/6$  deel van de rest. Dan zijn er nog  $\frac{5}{6}k$  voorradig aan het begin van de laatste dag, zodat  $n = \frac{5}{6}k$ . Dit betekent

dat  $k$  een zesvoud is, en  $n$  het overeenkomstige vijfvoud. Omdat  $n \leq 14$  volgt hieruit dat  $n = 5$  of  $n = 10$ .

Als  $n = 10$  en  $k = 12$  dan waren er aan het begin van de voorlaatste (negende) dag nog  $12 + 9 = 21$  medailles, maar dat kan niet omdat het niet  $\frac{5}{6}$  van een geheel getal is.

Als  $n = 5$  en  $k = 6$  dan waren er aan het begin van de voorlaatste (vierde) dag  $6 + 4 = 10$  medailles, aan het begin van de derde dag  $\frac{6}{5} \cdot 10 + 3 = 15$ , aan het begin van de tweede dag  $\frac{6}{5} \cdot 15 + 2 = 20$ , en aan het begin van de eerste dag  $\frac{6}{5} \cdot 20 + 1 = 25$ .

**10**

Schrijf  $n$  voor het gevraagde getal, en  $v_p$  voor het aantal keren dat het priemgetal  $p$  voorkomt in de priemfactorontbinding van  $n$ .

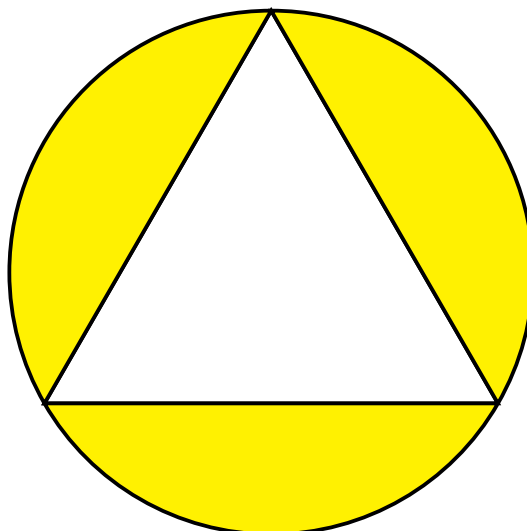
Elke deler  $d$  van  $n$  is een product van factoren  $p^{e_p}$ , waarbij  $0 \leq e_p \leq v_p$ . Voor  $e_p$  zijn dus  $v_p + 1$  keuzes mogelijk, en voor  $d$  in totaal  $k = (v_2 + 1)(v_3 + 1)(v_5 + 1) \dots$  keuzes. Volgens het gegeven moet  $k$  gelijk zijn aan 22.

Het getal 22 bevat een factor 2 en een factor 11 en dus doet  $n$  dat ook. Dit betekent dat  $v_2 \geq 1$  en  $v_{11} \geq 1$ , dus  $v_2 + 1 > 1$  en  $v_{11} + 1 > 1$ . Dus moet één van deze twee getallen gelijk zijn aan 2, de andere moet gelijk zijn aan 11, en alle andere factoren  $v_p + 1$  van  $k$  moeten gelijk zijn aan 1.

De enige mogelijkheden voor  $n$  zijn dus  $2^1 \cdot 11^{10}$  en  $2^{10} \cdot 11^1$ , en het is duidelijk dat de laatste kleiner is.

**11**

We kunnen de figuur ontstaan denken uit een cirkelschijf die een gelijkzijdige driehoek omsluit



en wel door de drie stukken die buiten de driehoek uitsteken langs de betreffende zijde naar binnen te vouwen. Daarbij wordt het donkere deel van de in de opgave aangegeven figuur (dus het klaverblad) tweemaal bedekt, en het lichte deel (dus de rest van de driehoek) éénmaal. We zien

- $\text{opp}(\text{lichte deel}) + 2 \text{ opp}(\text{donkere deel}) = \text{opp}(\text{uitsteeksels}) = \text{opp}(\text{schijf}) - \text{opp}(\text{driehoek})$

Anderzijds is

- $\text{opp}(\text{lichte deel}) + \text{opp}(\text{donkere deel}) = \text{opp}(\text{driehoek})$

Daaruit volgt

- $\text{opp}(\text{klaverblad}) = \text{opp}(\text{donkere deel}) = \text{opp}(\text{schijf}) - 2 \text{opp}(\text{driehoek})$ .

Nu is de hoogte van de driehoek  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ .

Zijn oppervlakte bedraagt dus  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ .

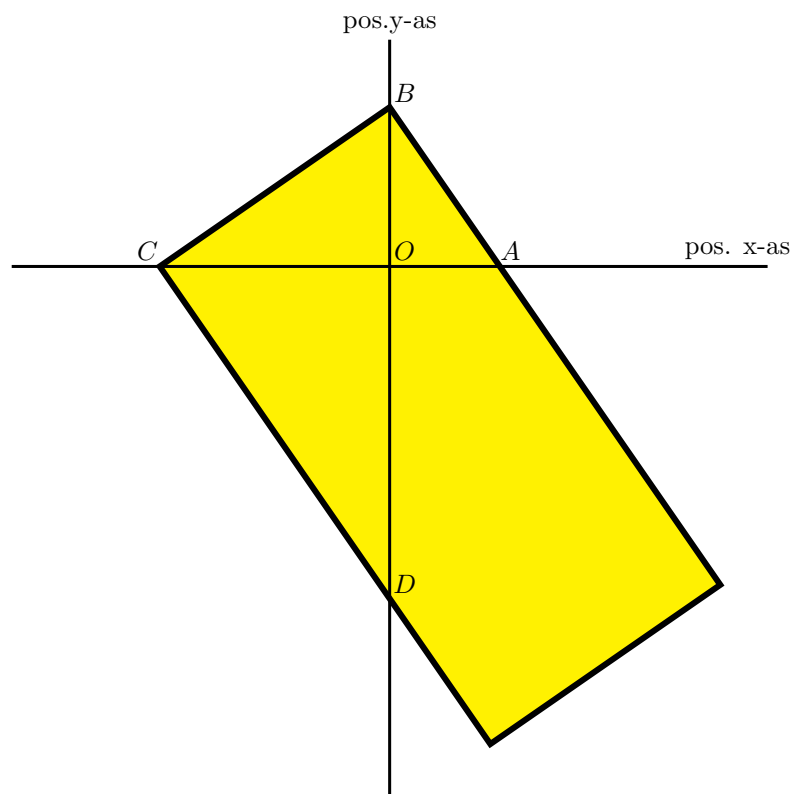
De straal van de schijf is  $\frac{2}{3}$  van die hoogte, dus  $\sqrt{2}$ .

Zijn oppervlakte bedraagt dus  $\pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$ .

De gevraagde oppervlakte is dus  $2\pi - 3\sqrt{3}$ .

12

We geven namen aan de snijpunten van de zijden van de rechthoek met de coördinaat-assen zoals in de figuur hieronder aangegeven.



De lengte van  $OA$  is 1 volgens het gegeven; schrijf  $b$  voor de lengte van  $OB$ .

De driehoek  $OAB$  is gelijkvormig met de driehoek  $OBC$ ; daaruit volgt dat de lengte van  $OC$  gelijk is aan  $b^2$ . De driehoek  $OBC$  is gelijkvormig met de driehoek  $OCD$ ; daaruit volgt dat de lengte van  $OD$  gelijk is aan  $b^3$ . Het gegeven zegt nu dat  $b^3 = 3$ ; daaruit volgt dat  $b = \sqrt[3]{3}$ .

13

De derdemachten zijn: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343,  $\dots$ .

De sommen van twee derdemachten zijn dus 2, 9, 16, 28, 35, 54, 65, 72, 91,  $\dots$ . Daarvan hebben alleen 28, 72, 91 som van cijfers 10.

De verschillen van twee derdemachten zijn dus 7, 19, 26, 37, 56, 61, 63, 91, 98,  $\dots$ . Verder hoeven we niet te gaan, want vanaf  $343 - 216$  is een som van opeenvolgende derdemachten al te groot voor twee cijfers. Hiervan hebben alleen 19, 37, 91 som van cijfers 10.

Als de eerste en tweede uitspraak hetzelfde getal betreffen, dan moet dat getal 91 zijn, maar dat voldoet niet aan de vierde of vijfde uitspraak. Die moeten dus het andere getal betreffen maar dat kan niet, want ze zijn met elkaar in strijd. We concluderen dat het ene getal uit  $\{28, 72, 91\}$  komt en het andere uit  $\{19, 37, 91\}$ .

Van deze getallen voldoet alleen 37 aan de vierde uitspraak en alleen 28 aan de vijfde uitspraak. De getallen zijn dus 28 en 37.

14

Beschouw het vlak met 1 oog. Het vlak daar recht tegenover heeft 8 ogen. Van de zes overblijvende vlakken zijn er 3 die wel en 3 die niet grenzen aan het vlak met 1 oog. Het vlak met 2 ogen behoort dan tot de ene groep, en het vlak met 7 ogen tot de andere groep. Door een geschikte rotatie kan men de dobbelsteen nu eenduidig zó plaatsen dat men twee vlakken ziet: het vlak met 1 oog boven, en het vlak met 2 of 7 ogen onder. De achterkant ligt dan ook vast.

Voor het vlak met 3 ogen zijn er nog 4 mogelijkheden over; de plaats van het vlak met 6 ogen ligt dan telkens vast. Voor het vlak met 4 ogen blijven telkens nog 2 mogelijkheden over; het vlak met 5 ogen is dan het enige overblijvende vlak. We komen zo op  $2 \times 4 \times 2 = 16$  mogelijkheden: twee-oog of zeven-oog naast een-oog, plaats drie-oog, plaats vier-oog.

15

Merk op dat 0,753 maar een klein beetje groter is dan  $\frac{3}{4}$ . We gaan daarom die vierkantswortel schrijven als  $v = j + \frac{3}{4} + a$  waarbij  $j$  een geheel getal is en  $0,003 \leq a < 0,004$ . Omdat  $v^2 = n < 41209 = 203^2$  is bovendien  $200 \leq v < 203$ , dus is  $j$  gelijk 200 of 201 of 202. Nu is

$$n = v^2 = j^2 + \frac{3}{2}j + \frac{9}{16} + 2ja + \frac{3}{2}a + a^2$$

We splitsen dit in een groot deel  $G = j^2 + \frac{3}{2}j$  en een klein deel  $K = \frac{9}{16} + 2ja + \frac{3}{2}a + a^2$ . We gaan laten zien dat  $K = 2$ . Omdat er maar drie mogelijkheden voor  $j$  zijn ben je dan gauw klaar.

Ten eerste is  $2ja < 2 \cdot 203 \cdot 0,004 = 1,624$  en  $\frac{3}{2}a < 0,006$  en  $a^2 < 0,000016$  dus  $K < 0,5625 + 1,624 + 0,006 + 0,0005 < 2,2$ .

Ten tweede is  $2ja > 2 \cdot 200 \cdot 0,003 = 1,200$  en  $\frac{3}{2}a > 0,0045$  en  $a^2 > 0$  dus  $K > 0,5625 + 1,200 + 0,0045 + 0 > 1,7$ .

Ten derde is  $K = n - v^2 - \frac{3}{2}j$  de helft van een geheel getal namelijk van  $2n - 2v^2 - 3j$ . Het enige getal  $K$  met deze drie eigenschappen is 2.

16

Schrijf  $a(n)$  voor het aantal kortste wegen naar de lijn  $2x + y = n$ . Beschouw een kortste weg naar een punt  $(u, v)$  dat op de lijn  $2x + y = n$  ligt. Er zijn twee mogelijkheden:

- Als de laatste stap van die weg naar boven liep, dan was dat een stap vanaf het punt  $(u, v - 1)$  dat op de lijn  $2x + y = n - 1$  ligt. Bovendien was het stuk vóór die laatste stap een kortste weg naar dat punt  $(u, v - 1)$ , want als er een kortere weg was, dan maakte die laatste stap er een kortere weg naar  $(u, v)$  van.
- Als de laatste stap van die weg naar rechts liep, dan was dat een stap vanaf het punt  $(u - 1, v)$  dat op de lijn  $2x + y = n - 2$  ligt. Bovendien was het stuk vóór die laatste stap een kortste weg naar dat punt  $(u - 1, v)$ .

Omgekeerd levert een kortste weg naar de lijn  $2x + y = n - 1$  in combinatie met een stap naar boven een kortste weg naar de lijn  $2x + y = n$ , en een kortste weg naar de lijn  $2x + y = n - 2$  levert in combinatie met een stap naar rechts ook een kortste weg naar de lijn  $2x + y = n$ . We vinden zo de fundamentele relatie

$$a(n) = a(n - 1) + a(n - 2)$$

Omdat het duidelijk is dat  $a(1) = 1$  en  $a(2) = 2$  vinden we achtereenvolgens  $a(3) = 3$ ,  $a(4) = 5$ ,  $a(5) = 8$ ,  $a(6) = 13$ ,  $a(7) = 21$ ,  $a(8) = 34$ ,  $a(9) = 55$ ,  $a(10) = 89$ ,  $a(11) = 144$ ,  $a(12) = 233$ ,  $a(13) = 377$ ,  $a(14) = 610$ ,  $a(15) = 987$ ,  $a(16) = 1597$ ,  $a(17) = 2584$ ,  $a(18) = 4181$  en  $a(19) = 6765$ . De oneindige rij waarvan dit een beginstuk is heet de rij van *Fibonacci*; voor meer daarover zie Wikipedia. Omdat  $a(15)$  en  $a(17)$  al gegeven waren kun je uit bovenstaande relatie meteen  $a(16)$  bepalen, en daarna  $a(18)$  en  $a(19)$ .

17

Als  $n$  spiegelverwant is aan  $m$ , dan is  $\frac{n}{S(n)} = \frac{S(m)}{m}$ . In het bijzonder: als  $n$  spiegelverwant is aan 6024, dan is  $\frac{n}{S(n)} = \frac{4206}{6024} = \frac{701}{1004}$ . Omdat 1004 en 701 geen factoren gemeen hebben, zijn de breuken die tot  $\frac{701}{1004}$  vereenvoudigen precies die waarbij de teller gelijk is aan 701j en de noemer gelijk is aan 1004j voor zeker geheel getal  $j$ . We moeten dus hebben:

$$n = 701j, \quad S(n) = 1004j.$$

Je kunt nu  $j = 1, 2, \dots$  uitproberen en kijken wanneer 701j precies de gespiegelde van 1004j wordt. Dat blijkt in het aangegeven bereik het geval te zijn voor  $j = 3, 6$  en  $9$ . Buiten dat bereik voldoet bijvoorbeeld ook elke  $j$  van de vorm  $33 \dots 33$ .

18

Schrijf  $n$  voor het getal dat we zoeken. Elk getal dat 0 als laatste cijfer heeft is deelbaar door 10. Dus omdat 0 voorkomt als laatste cijfer van een deler, is  $n$  een tienvoud.

Als 7 het laatste cijfer van een deler is, dan die deler 7 of 17 of 27 of iets groters. Omdat  $n$  ook een tienvoud is, dan is hij dus in feite deelbaar door 70 of 170 of 270 of iets groters. De kleinste mogelijkheden voor  $n$  zijn dus 70, 140, 170, 210 en 270.

Een analoge redenering voor het cijfer 9 laat als kleinste mogelijkheden 90, 180, 190 en 270.

Vergelijken van deze lijstjes laat zien dat geen  $n$  kleiner dan 270 voldoet. Bovendien voldoet 270, want de delers zijn 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135 en 270.

19

Stel dat bijvoorbeeld  $a$  op de cijfers 99 eindigt. Dat betekent dat  $a = 100k + 99$  voor zeker geheel getal  $k$  met  $k \geq 0$ . Dan is  $a + b + ab = 100(kb + k + b) + 99$  en dat getal eindigt op de cijfers 99.

Oorspronkelijk kwam het getal 99 op het bord voor. Op zeker moment wordt dat uitgeveegd en vervangen door een ander getal dat echter op 99 eindigt. Elke keer dat dit getal wordt uitgeveegd en vervangen door een ander getal eindigt het nieuwe getal op 99. Dus het getal dat op het laatst overblijft eindigt daar ook op.

20

De stippellijn die de bewegingsrichting aangeeft en de lichaamsdiagonaal waarom de kubus draait zijn lijnen in een horizontaal vlak die een rechte hoek met elkaar maken. Dus we kunnen evengoed de hoek  $\beta$  bepalen tussen de lichaamsdiagonaal en de genoemde ribben: de hoeken  $\alpha$  en  $\beta$  zijn complementair.

Schrijf  $L$  voor de lengte van de ribbe van de kubus. De lichaamsdiagonaal en een ribbe vormen de schuine zijde en een rechthoekszijde van een rechthoekige driehoek waarvan de overblijvende rechthoekszijde een diagonaal is van een zijvlak van de kubus en dus lengte  $L\sqrt{2}$  geeft. Daaruit volgt dat  $\tan(\beta) = \frac{L\sqrt{2}}{L} = \sqrt{2}$ , ofwel dat  $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , ofwel dat  $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ . Dus is  $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  en  $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  en  $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .