
WISKUNDE-ESTAFETTE KUN 2003

60 Minuten voor 20 opgaven.

Het totaal aantal te behalen punten is 500

1 (20 punten)

Gekleurde sokken

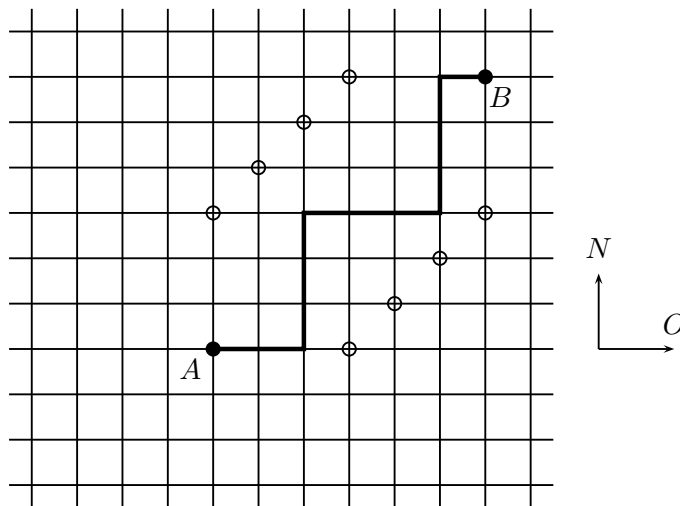
Op de planeet Swift B6 wonen de Houyhnhnms. Ze lijken sprekend op paarden; in het bijzonder hebben ze vier voeten. Ze dragen (onder andere) sokken, en je kunt er niet voor de dag komen als je niet vier sokken van dezelfde kleur aanhebt. Er is geen verschil tussen linker- en rechtersokken, of tussen voor- en achtersokken. Een Houyhnhnm moet, in het stikdonker, uit een la die 50 rode, 50 blauwe, 50 groene en 50 gele sokken bevat zó veel sokken halen dat hij zeker weet dat daar vier gelijk gekleurde bij zijn.

Wat is het kleinste aantal dat hem zekerheid biedt?

2 (30 punten)

Zonder omwegen

Het stratenplan van een stad ziet eruit zoals hieronder geschetst is. Iemand wandelt elke morgen van zijn huis bij *A* naar zijn werk bij *B*, en wel zonder omwegen, dus op elk moment naar het noorden of naar het oosten. Hij heeft daarbij de keus uit een groot aantal routes, waarvan er één getekend is.



Op een ochtend zijn de kruispunten die op het stratenplan met een kringetje gemerkt zijn, geblokkeerd.

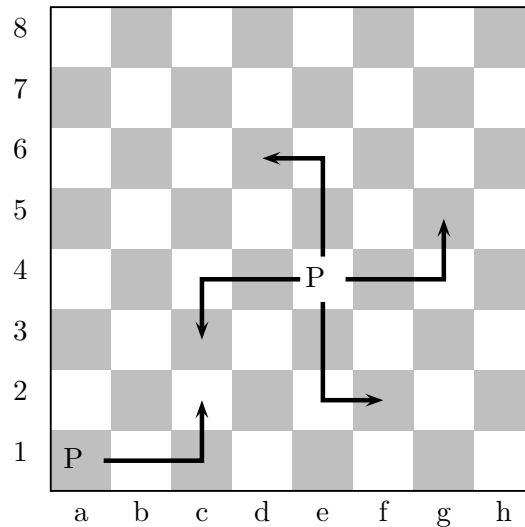
Uit hoeveel routes kan hij nu nog kiezen?

3 (20 punten)

Eenzijdige paarden

We spelen schaak met genetisch gemanipuleerde paarden die alleen nog linksom kunnen

springen: 2 rechthoek, 1 naar links. Dus vanuit veld $e4$ van het schaakbord kun je in één zet veld $d6$, $c3$, $f2$ of $g5$ bereiken, maar niet veld $f6$ (en vanuit veld $a1$ alleen veld $c2$). Door meerdere zetten te doen kun je vanuit veld $e4$ veld $a7$ en $f7$ bereiken, maar niet veld $e6$.

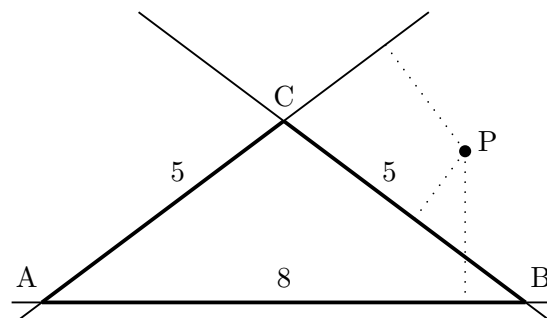


Hoeveel dergelijke paarden moeten er op het bord staan om elk veld van het bord te kunnen bereiken?

4 (20 punten)

Kleinste som

Drie lijnen snijden elkaar in punten A , B en C zó dat $AB = 8$, $AC = 5$ en $BC = 5$. Voor elk punt P van het vlak kan men de som bepalen van de afstanden van P tot de drie lijnen.

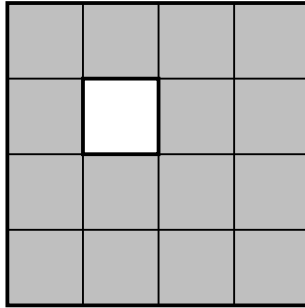


Wat is onder al die sommen de kleinste?

5 (20 punten)

Knippen

Een vierkant stuk karton wordt verdeeld in 4×4 kleine vierkantjes. Vervolgens wordt een van de vier middelste vierkantjes er uit geknipt.



Hoe kan ik dit stuk karton (langs grenslijnen van de kleine vierkantjes) in twee stukken knippen die ik aan elkaar kan leggen tot een rechthoek? Teken de kniplijn in.

6 (20 punten)

Kwadraten vergroten

We zoeken getallen n waarvoor geldt dat

- n is het kwadraat van een positief geheel getal
- ook $n + 48$ is het kwadraat van een positief geheel getal.

*Geef **al** zulke getallen n .*

7 (20 punten)

Kloppend maken

Vervang in het volgende de letters door cijfers (niet allemaal nullen) op zo'n manier dat de berekening klopt:

$$9 \times ABCDE = EDCBA$$

Verschillende letters hoeven niet door verschillende cijfers te worden vervangen.

8 (30 punten)

Woorden tellen

Gegeven is een alfabet dat bestaat uit 20 medeklinkers en 5 klinkers. We maken woorden volgens de volgende regels.

- Er mogen geen 3 klinkers achter elkaar staan.
- Er mogen geen 3 medeklinkers achter elkaar staan.

Hoeveel goed gespelde woorden van precies 4 letters zijn er mogelijk?

9 (20 punten)

Kubus bouwen

Iemand heeft een heleboel blokken van 2 bij 4 bij 6 cm.

Hoeveel van die blokken heeft hij minstens nodig om er een massieve kubus mee te bouwen?

10 (20 punten)

Winst en verlies

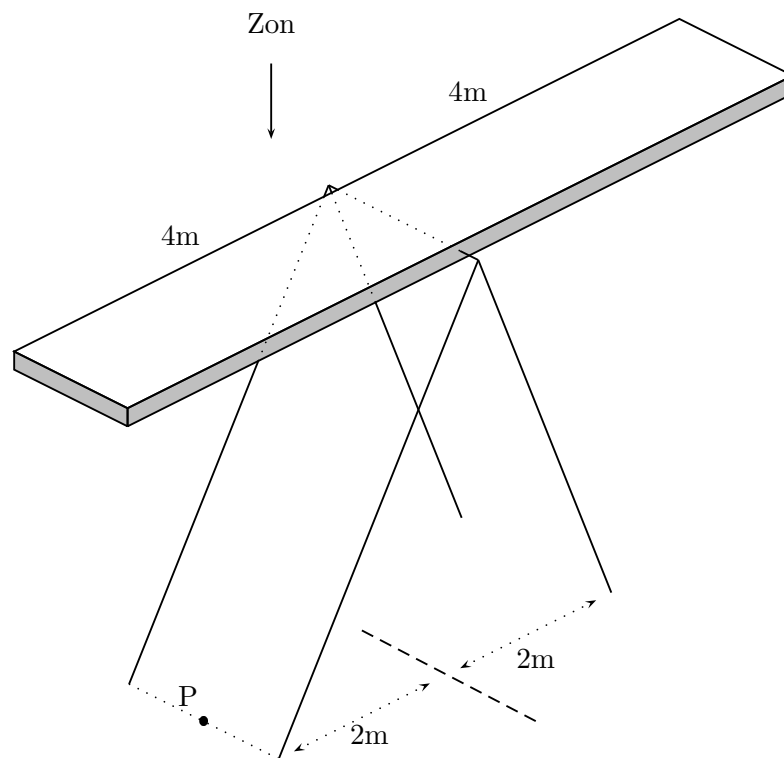
Een man begint 1 januari 2003 met speculeren, met een startkapitaal van 1000 euro. Elke volgende 1 januari voegt hij bovendien 1000 euro spaargeld aan zijn inleg toe. Achteraf blijkt de beurs heel voorspelbaar te zijn: in even jaren verdubbelt zijn inleg, en in oneven jaren halveert deze.

Hoeveel bedraagt de waarde van zijn belegging op 31 december 2043?

11 (20 punten)

In de schaduw

Een rechthoekige plank van verwaarloosbare dikte en van 8 meter lengte draait met constante snelheid om een horizontale as door het midden van de plank. Van de stellage die de as draagt staan de voorpoten 2 meter vóór de lijn recht onder de as. Midden tussen de voorpoten bevindt zich het punt P .



De zon schijnt voortdurend (!) loodrecht op de grond.

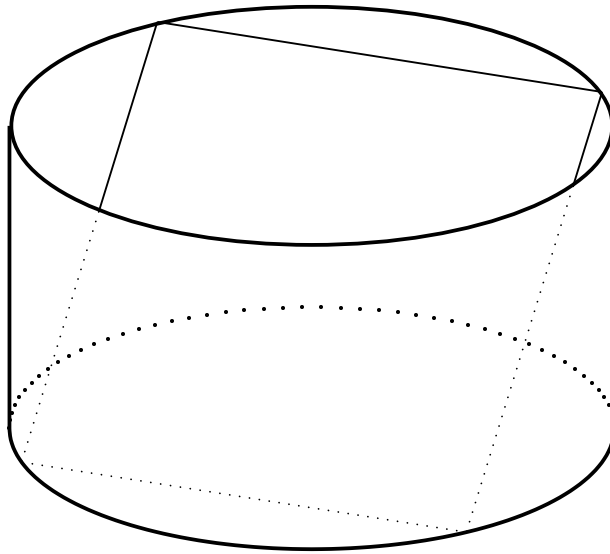
Welk deel van de tijd ligt punt P in de schaduw?

12 (30 punten)

Vierkant in bak

Gegeven is een cilindervormige bak, met een straal van 1 dm, en een hoogte van 1 dm. In die bak ligt een vierkant stuk karton. Een zijde rust op de bodem, met de eindpunten

tegen de zijwand van de bak. De tegenoverliggende zijde reikt precies tot de bovenkant van de bak, en rust ook met zijn eindpunten tegen de zijwand.



Hoe groot is de oppervlakte van dat vierkant?

13 (20 punten)

Nullen tellen

Met $n!$ bedoelen we het product van de eerste n positieve gehele getallen. Dus

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

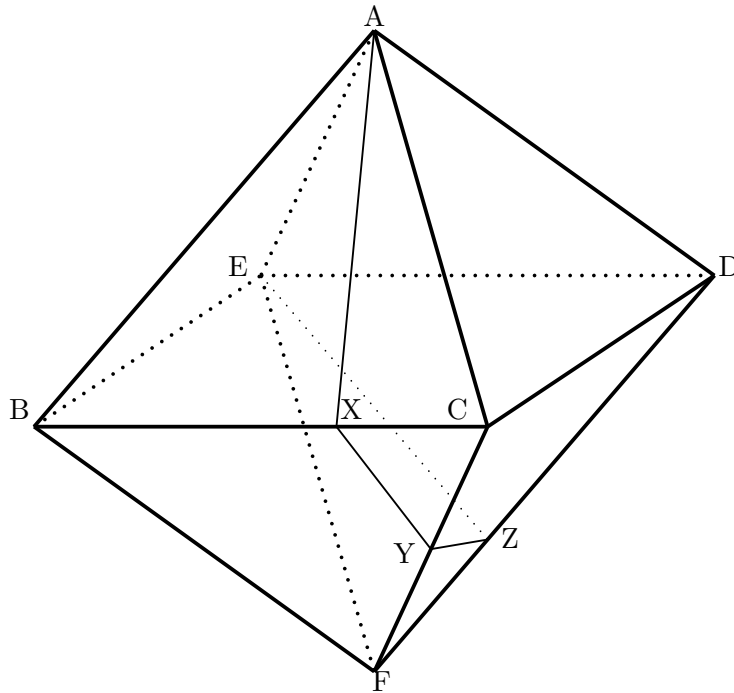
Op hoeveel nullen eindigt $125!$ in de gewone decimale schrijfwijze?

14 (30 punten)

Achthvlak

Gegeven is een regelmatig achthvlak met de lengte van de ribben gelijk aan 1.

Verduidelijking: De bovenste helft is een piramide met als grondvlak een vierkant $BCDE$ en als grensvlakken vier gelijkzijdige driehoeken met gezamenlijk hoekpunt A , en de onderste helft net zo met gezamenlijk hoekpunt F .



We spannen een elastiekje over dit achthoek van A naar E , en wel zo dat het achtereenvolgens over de grensvlakken ABC , BCF , CFD en FDE loopt. Door zijn spanning kiest het elastiekje de kortste weg over de genoemde grensvlakken.

Hoe lang is die weg?

15 (30 punten)

Een merkwaardig kwadraat

Er bestaat één getal van de vorm $aabb$ (gewone decimale schrijfwijze) dat het kwadraat is van een positief geheel getal n .

Geef de waarde van n .

16 (30 punten)

Sommen van sommen

We hebben een kubus waarvan elk van de zes grensvlakken is beschreven met een getal. Net zoals bij een dobbelsteen is de som van de opschriften van tegenover elkaar liggende grensvlakken steeds hetzelfde. We doen het volgende.

- Eerst noteren we voor elk hoekpunt:
de som van de opschriften van de drie grensvlakken die daar samenkomen.
- Vervolgens noteren we voor elk grensvlak:
de som van de vier getallen die we bij de vier hoekpunten hebben genoteerd.

De getallen die we nu genoteerd hebben zijn:

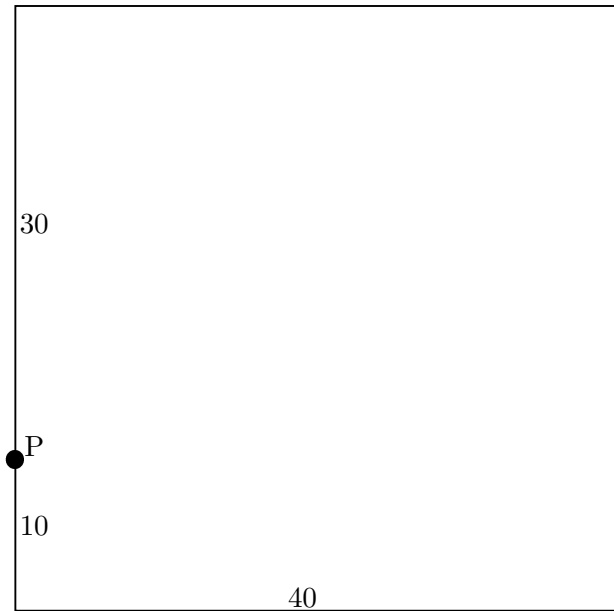
56, 68, 76, 80, 88, 100

Welke zes getallen stonden er op de grensvlakken, in volgorde van stijgende grootte?

17 (30 punten)

Gemiddelde afstand

Een vierkant heeft zijde 40. Op een van de zijden ligt punt P , op afstand 10 van een eindpunt. Op de zijde daartegenover liggen veertig punten, op onderlinge afstand 1 (de buitenste punten liggen op afstand $\frac{1}{2}$ van de hoekpunten van het vierkant).



Voor elk van de veertig punten is er een kortste weg van P naar dat punt, **lopend langs de omtrek van het vierkant**.

Bepaal het gemiddelde van de lengtes van de veertig wegen.

18 (30 punten)

Magisch vierkant

Je kunt in elk van de vakjes van een 4×4 vierkant een van de getallen $1, 2, 3, \dots, 16$ onderbrengen, zó dat de getallen in elk van de negen 2×2 -deelvierkanten dezelfde som hebben, zoals bijvoorbeeld

4	6	3	5
11	13	12	14
2	8	1	7
9	15	10	16

Dat kan op vele manieren. Er is een manier die als volgt start:

	7		3
9	2		
1			?

Welk getal komt dan rechtsonder?

19 (30 punten)

Grootvaders leeftijd

Jan speelt graag met getallen, en heeft iets opmerkelijks ontdekt. Als je van de leeftijd van zijn grootvader driemaal de som van de cijfers aftrekt, levert dat de leeftijd van zijn vader op. Net zo krijg je Jans leeftijd uit die van Jans vader, en de leeftijd van Jans zoontje uit die van Jan zelf. Jans zoontje is 4 jaar oud.

Hoe oud is Jans grootvader?

20 (30 punten)

Constante breuk

Als $a = -2$, dan hangt de waarde van de breuk

$$\frac{x + a^2 - a + 1}{(a + 1)x + 4a + 1}$$

niet van x af (voor alle x waarvoor de noemer niet nul is).

Geef alle andere waarden voor a waarvoor dit ook het geval is.