

31^e Wiskundetoernooi

Radboud Universiteit



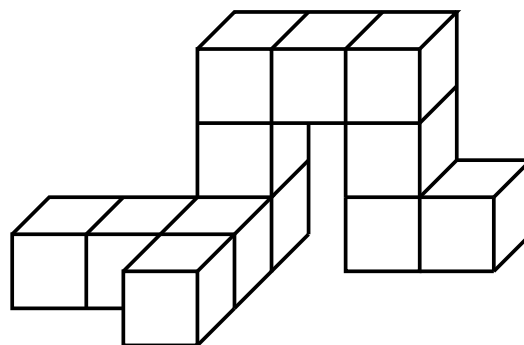
2022 Estafette

universität bonn

KU LEUVEN

Opgave 1 (20 punten)

Het hieronder getekende object bestaat uit 12 aan elkaar gelijkde kubussen, elk met ribben van lengte 1.

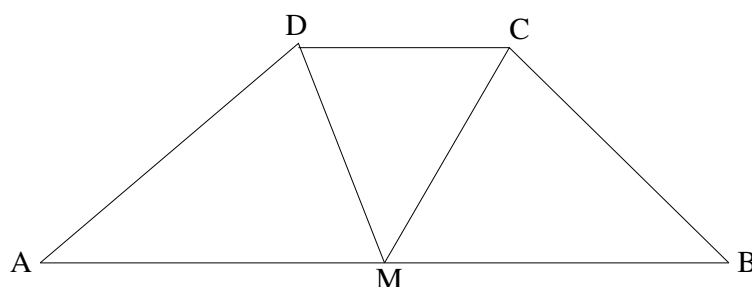


Hoe groot is zijn oppervlakte?

Opgave 2 (20 punten)

In een vierhoek $ABCD$ is M het midden van AB . Gegeven is

$$|AM| = |BM| = |BC| = |AD| = 8 \quad \text{en} \quad |DM| = |CM| = 5.$$



Bereken $|CD|$.

Opgave 3 (30 punten)

Een aantal scholieren staan in een cirkel. De leraar wil er eentje uitkiezen, die naar de kantine gaat en voor de hele groep koekjes haalt. Zoals gebruikelijk in dit soort vragen gebeurt dat op een ingewikkelde manier.

Het proces begint ergens in de kring, laten we die persoon het nummer 1 geven, degene rechts daarvan nummer 2 enzovoorts. Persoon 1 blijft staan. Vervolgens moet degene rechts ervan (2 dus) de kring verlaten. Dan gaan we naar degene rechts daarvan, 3 in dit geval. Die blijft staan, en de persoon rechts daarvan moet de kring verlaten. Zo gaat het door, waarbij de kring steeds kleiner wordt. Uiteindelijk blijft er één leerling over, en die moet koekjes halen.

Welk nummer in de kring had die laatste scholier, als er in het begin duizend leerlingen waren?

Opgave 4 (20 punten)

In het onderstaande vierkant bekijken we paden, waarvan elk stukje de lengte van een vierkantje heeft en horizontaal of verticaal staat. Met zo'n pad mogen we elk vierkantje slechts één maal betreden. We schrijven de cijfers die we tegen komen langs het pad achter elkaar op. Hieronder zie je een voorbeeld van een pad dat het getal 84937561 oplevert.

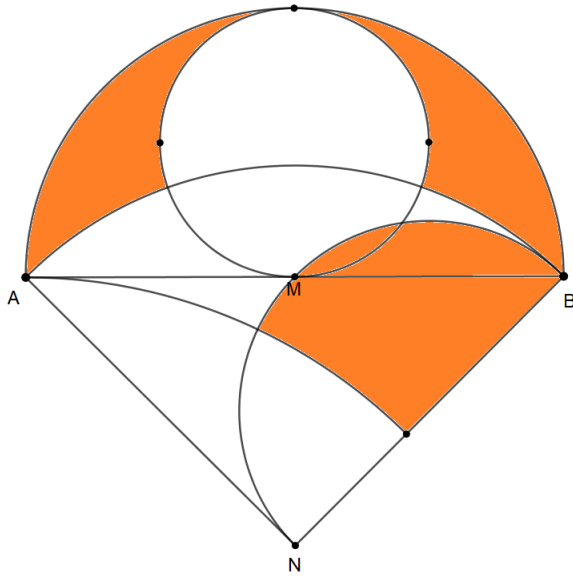
Wat is het grootste getal dat op deze manier gemaakt kan worden?

1	8	4
6	3	9
5	7	2

1	8	4
6	3	9
5	7	2

Opgave 5 (30 punten)

In de onderstaande figuur is M het middelpunt van AB , $|AN| = |BN|$ en de hoek bij N is loodrecht. Het lijnstuk AB heeft lengte 1, en er boven op is een halve cirkel getekend. Verder loopt er een kwart cirkel met middelpunt N van A naar B . De kromme vanuit A naar een punt op NB is een deel van een cirkel met straal $|AB|$.



Bereken de oppervlakte van het oranje gebied.

Opgave 6 (20 punten)

Vliegtopia is een land met een heleboel vliegvelden. Alle vliegvelden liggen op verschillende afstanden van elkaar.

Op een dag stijgt er vanaf elk vliegveld een vliegtuig op, en landt op het dichtsbijzijnde vliegveld.

Hoeveel vliegtuigen kunnen er nu maximaal op een vliegveld landen?

Opgave 7 (20 punten)

Drie klokken tikken met verschillende snelheden: de eerste klok tikt elke 2 seconden, de tweede elke 3 seconden en derde elke 5 seconden. De klokken zijn tegelijk begonnen met tikken.

Hoeveel tijd verstrijkt tussen de eerste en de duizendste tik? Hierbij worden gelijktijdige tikken als één tik beschouwd.

Opgave 8 (30 punten)

Vier personen moeten 's nachts een hangbrug oversteken. De brug kan het gewicht van maximaal twee personen dragen en er is slechts één zaklamp, die absoluut noodzakelijk is om de oversteek te wagen. Als een persoon de brug oversteekt, moet hij dus de zaklamp bij hebben en als twee personen de brug oversteken, moeten ze de zaklamp bij hebben én samen blijven. Eén of meerdere personen zullen de oversteek dus meerdere keren moeten maken om de zaklamp terug te brengen. De personen hebben verschillende tijden nodig om de brug over te steken: persoon A kan het in 1 minuut, persoon B in 2 minuten, persoon C in 5 minuten en persoon D in 10 minuten.

Hoeveel minuten zijn er minimaal nodig om iedereen van de ene kant van de brug naar de andere kant te brengen?

Opgave 9 (20 punten)

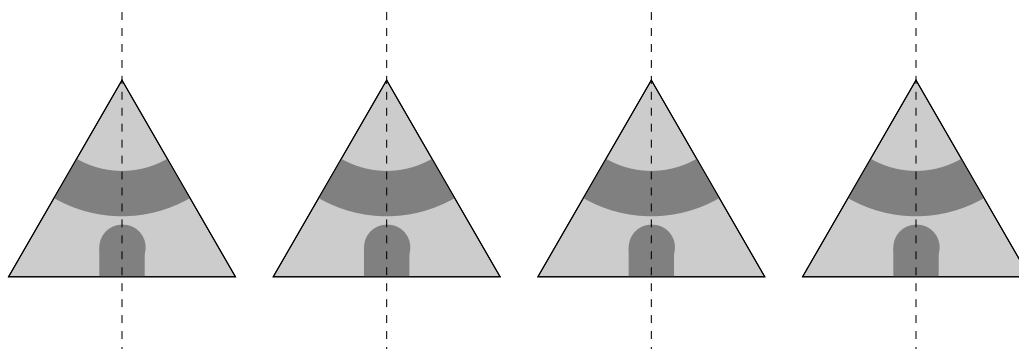
We maken een lange rij cijfers, door de kwadraten van de getallen 1 tot en met 44 achter elkaar te schrijven.

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 ... 1936

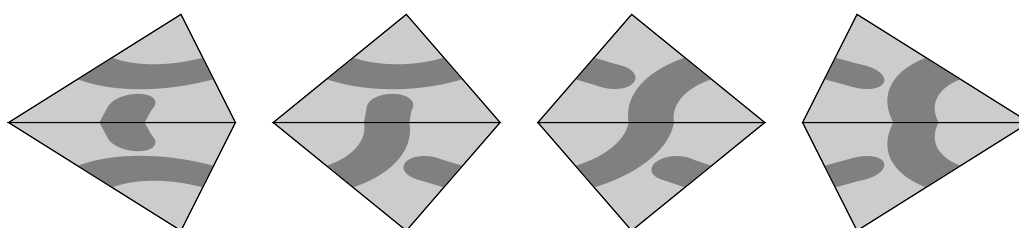
Hoeveel cijfers lang is deze rij?

Opgave 10 (30 punten)

Vier congruente regelmatige driehoeken hebben dezelfde opdruk. De opdruk is enkelvoudig symmetrisch en de symmetrie-as is met een stippellijn aangegeven.



Door de randen van de vier driehoeken aan elkaar te plakken, kun je een tetraëder maken, zodanig dat de opdruk van alle driehoeken naar buiten is gericht en dus zichtbaar is. Hieronder zie je vier mogelijke tetraëders.



Van elke tetraëder zijn slechts twee van de vier driehoeken zichtbaar. Dehalve kunnen er twee gelijk aan elkaar zijn, ook al zien ze er allemaal verschillend uit.

Hoeveel verschillende tetraëders kunnen we zo maken?

[Twee tetraëders zijn hetzelfde als de ene door middel van draaiingen over te voeren is in de ander.]

Opgave 11 (30 punten)

Een ober in een Italiaans restaurant heeft een methode gevonden om wijn uit de voorraadkelder te stelen. Hij drinkt drie glazen uit een vat en vult het vat terug aan met

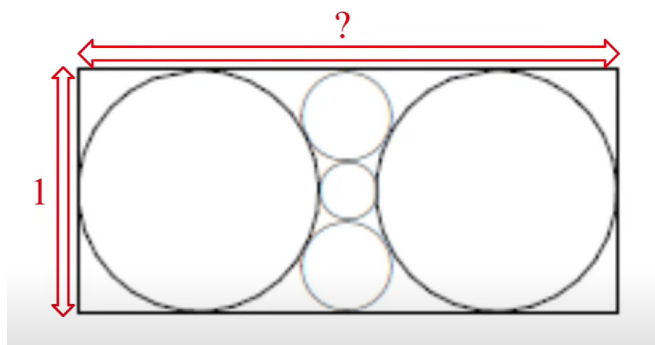
drie glazen water. De volgende dag doet hij precies hetzelfde met hetzelfde vat (dat nu aangelengde wijn bevat) en de derde dag doet hij nogmaals precies hetzelfde met hetzelfde vat. Hierna bevat het vat 72.9% wijn en 27.1% water.

Wat is de inhoud van het volle wijnvat uitgedrukt in aantal glazen?

Opgave 12 (20 punten)

Vijf cirkels raken aan elkaar en aan de zijden van een rechthoek zoals in de onderstaande figuur.

Wat is de verhouding van de lange zijde tegenover de korte zijde van de rechthoek?



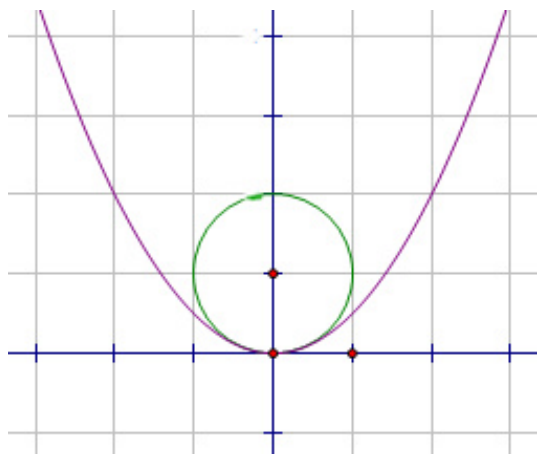
Opgave 13 (30 punten)

Zij $n > 0$ een oneven geheel getal. Zij V een deelverzameling van $\{-n, 1-n, \dots, n-1, n\}$ zodat: voor alle a, b, c in V geldt $a + b + c \neq 0$. (Hierbij mag $a = b$ of $a = c$ etcetera.)

Bepaal de maximale grootte van V .

Opgave 14 (20 punten)

Gegeven is een parabool, de grafiek van de functie $y = x^2$. Verder hebben we een cirkel die geheel boven de parabool ligt, en die aan de parabool raakt in het bodempunt van de parabool.



Hoe groot kan de straal van deze cirkel maximaal zijn?

Opgave 15 (30 punten)

Op een feest zijn 2022 mensen. Voor elke groep van vier personen op het feest is er minstens eentje de andere drie kent. Hierbij nemen we aan dat als A B kent, dan ook B A kent.

Wat is het minimale aantal mensen die alle feestgangers kennen?

Opgave 16 (20 punten)

Een konijn springt langs een lijn op de grond. Het huis van het konijn is een hol op de lijn. Het konijn volgt twee regels:

- als het konijn zich op een afstand $d \leq 1$ van het hol bevindt, dan springt het weg van het hol, naar een punt op afstand d van zijn vorige positie;
- als konijn zich op een afstand $d > 1$ van het hol bevindt, dan springt het over het hol heen, naar een punt op afstand $1/d$ van het hol.

Hoeveel reeksen van drie sprongen, waarbij het konijn uiteindelijk landt op afstand 0.8 van het hol, zijn er mogelijk?

Opgave 17 (20 punten)

Stel dat $1 \leq a < b < c < d \leq 10$ getallen zijn. Wat is de minimale waarde van $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

Opgave 18 (30 punten)

Voor elk geheel getal $n > 1$ maken we een rijtje $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$. Het begingetal van het rijtje is $a_1 = n$. Als het getal a_j uit de rij oneven is, dan kun je het volgende getal als volgt maken:

$$a_{j+1} = (a_j + 1)/2.$$

We stoppen het rijtje zodra we uitkomen op een getal a_k dat even is.

Voorbeeld. Als $n = 5$, dan is het begingetal van het rijtje $a_1 = 5$.

Het volgende getal is $a_2 = (5 + 1)/2 = 3$.

Dit is oneven, dus we gaan door: $a_3 = (3 + 1)/2 = 2$.

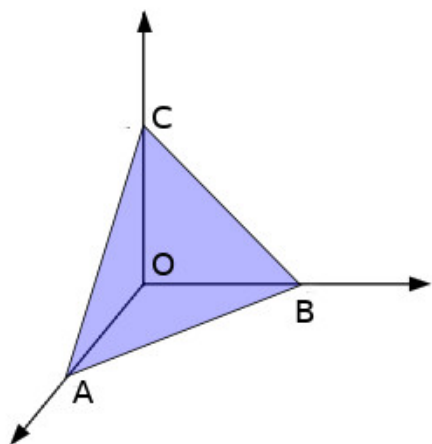
Dit is even, dus nu stoppen we. Bij $n = 5$ hoort dus het rijtje van drie getallen: 5, 3, 2.

Het aantal getallen in het rijtje hangt af van het begingetal. Bijvoorbeeld, met het begingetal $n = 7$ wordt het rijtje nog korter: 7, 4.

Wat is het kleinste begingetal n waarvoor het rijtje uit 2022 getallen bestaat?

Opgave 19 (30 punten)

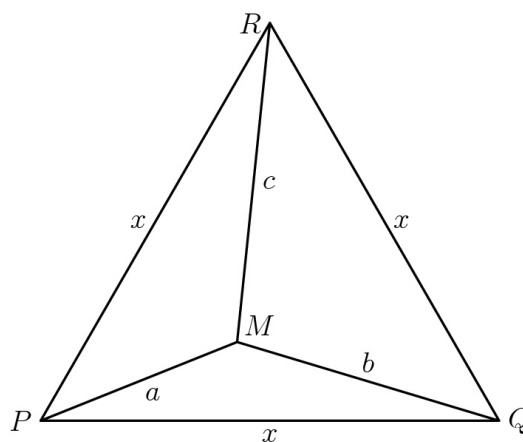
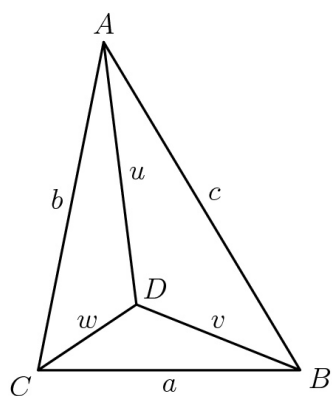
Bekijk een tetraëder $OABC$ zodat alle drie de hoeken bij O loodrecht zijn. Neem aan dat $|OA| + |OB| + |OC| = 1$.



Bepaal het maximale volume van de tetraëder.

Opgave 20 (30 punten)

In de figuur hieronder zijn alle drie de hoeken bij D 120° .



Bepaal x in termen van u, v en w .



Uitwerking opgave 1

Er zitten 12 kubussen in, die elk oppervlakte 6 hebben. Zonder aan elkaar lijmen zou dat als oppervlak 72 geven. Er zijn 11 keer twee vlakken aan elkaar gelijmd, die tellen niet meer mee voor het oppervlak van het object, de overige vlakken wel. Dat geeft $72 - 11 \cdot 2 = 50$.

Uitwerking opgave 2

Er geldt

$$\angle DMC = 180^\circ - \angle DMA - \angle CMB = 180^\circ - \angle DMA - \angle MDA.$$

Vanwege de hoekensom in $\triangle ADM$ is dat gelijk aan $\angle DAM$. Aangezien zowel $\triangle ADM$ als $\triangle MCD$ gelijkbenig met tophoek $\angle DAM$ zijn, zijn deze twee driehoeken gelijkvormig. In het bijzonder

$$|CD|/|DM| = |DM|/|AD| = 5/8.$$

Hieruit volgt dat $|CD| = 5 \cdot 5/8 = 25/8$.

Uitwerking opgave 3

Eerste bekijken we een makkelijker geval, namelijk dat het aantal scholieren een macht van 2 is, zeg 2^k . In de eerste ronde moeten alle leerlingen op de even posities de kring verlaten. Dan komen we weer bij nummer één, en op dat moment zijn er nog precies 2^{k-1} personen over. In elke ronde halveert het aantal scholieren, maar nummer 1 blijft staan. Dus persoon 1 is degene die over blijft.

Voor een willekeurig beginaantal betekent dat: zodra het aantal overgebleven personen op een bepaald moment een macht van 2 is, blijft degene die dan aan de beurt is uiteindelijk over.

De grootste macht van 2 kleiner dan 1000 is 512. Dat aantal wordt bereikt zodra er $1000 - 512 = 488$ leerlingen de kring verlaten hebben. De 488ste persoon die de kring verlaat stond op positie $2 \cdot 488 = 976$. Dus de scholier met nummer 977 blijft als laatste over.

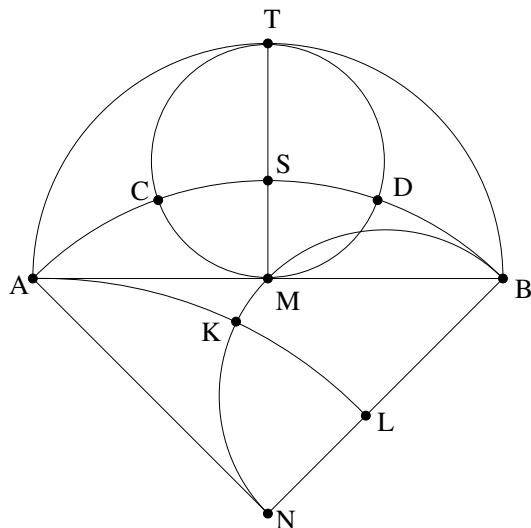
Uitwerking opgave 4

Het grootste getal is er zeker een met 9 cijfers. Door de figuur als een schaakbord te kleuren, zien we dat alleen een pad van lengte 9 kunnen maken als we beginnen in een

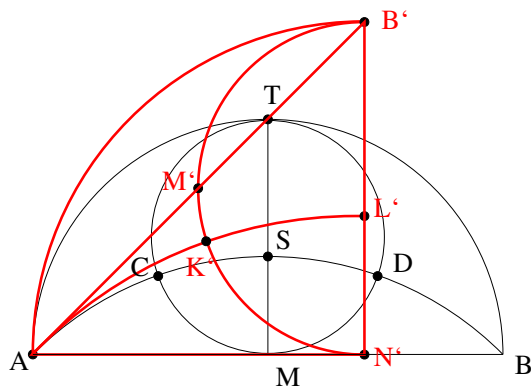
hoekpunt of in het midden. Het grootst mogelijke begingetal is dan 5. Van daar uit is grootste keuze 7, en vervolgens 3. Dan is er nog maar één manier om met een pad elk vierkantje te bereiken, namelijk 673618492.

Uitwerking opgave 5

Voor het gemak benoemen we nog enkele punten:

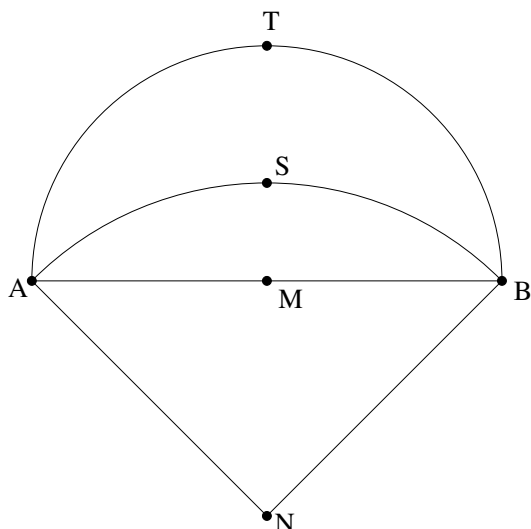


Eerst beargumenteren we dat de oppervlakte van het oranje stuk met hoekpunten K, L, B gelijk is aan de oppervlakte van het gebied met hoekpunten C, D, T . Neem de taartpunt met hoekpunten A, N, B , draai die 45° omhoog om A (dat verandert de oppervlakte niet). Dan krijgen we een nieuwe taartpunt met hoekpunten A, N', B' :



Pythagoras zegt dat $|AN| = |BN| = 1/\sqrt{2}$, dus ook $|AN'| = 1/\sqrt{2}$. Vanuit A gezien is het stuk met hoekpunten A, N', B' de vergroting van het stuk met hoekpunten A, M, T , met een vergrotingsfactor $\sqrt{2}$. Daaruit volgt dat de oppervlakte van het stuk met hoekpunten K', L', B' precies 2 keer de oppervlakte van het stuk met hoekpunten C, S, T is. Dat is ook gelijk aan de oppervlakte van het gebied met hoekpunten C, D, T , zoals geclaimd.

Met deze kennis zien we dat de gevraagde oppervlakte van het oranje gebied gelijk is aan de oppervlakte van het maantje bepaald door de punten A, S, B, T . Op die oppervlakte te bepalen bekijken we deze figuur:

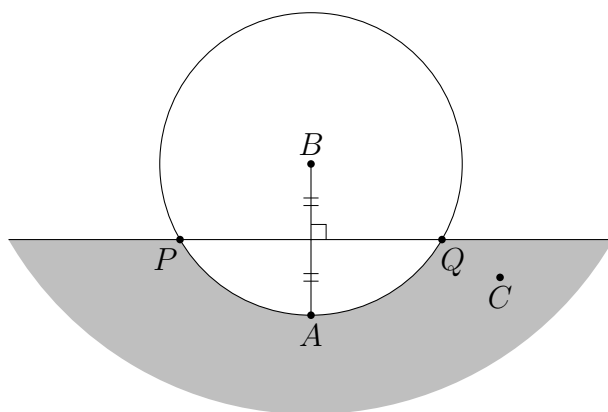


De kwart schijf met punten A, N, B, S heeft straal $1/\sqrt{2}$, dus oppervlakte $\pi(1/\sqrt{2})^2/4 = \pi/8$. Verder heeft de driehoek $\triangle ANB$ oppervlakte $|AN| \cdot |BN|/2 = 1/4$. Daaruit volgt dat het gebied tussen de punten A, M, B, S oppervlakte $\pi/8 - 1/4$ heeft.

De halve schijf met punten A, M, B, T heeft straal $1/2$, dus oppervlakte $\pi(1/2)^2/2 = \pi/8$. De gezochte oppervlakte van het maantje A, S, B, T kunnen we dan berekenen als de oppervlakte van de halve schijf minus de oppervlakte van het deel tussen de punten $AMBS$:

$$\text{Opp (oranje deel)} = \text{Opp}(\text{maantje } A, S, B, T) = \pi/8 - (\pi/8 - 1/4) = 1/4.$$

Uitwerking opgave 6



Kies een vliegveld en noem dit A. We gaan zo veel mogelijk vliegtuigen op A proberen te laten landen.

Noem het dichtstbijzijnde vliegveld B. Om te zorgen dat het vliegtuig van B op A landt, mogen in de cirkel rond B, met straal van B tot A, dus geen vliegvelden liggen.

We proberen nog een vliegveld C neer te leggen, zo dicht mogelijk bij B. Dit vliegveld C moet dicht bij A liggen dan bij B. In andere woorden, als we een middelloodlijn tussen A en B trekken, moet C aan de kant van A liggen. Deze middelloodlijn snijdt de cirkel in twee punten, zeg P en Q. Driehoek $\triangle ABP$ is een gelijkzijdige driehoek, dus de

hoek $\angle BAP$ is 60 graden. Ons vliegveld C mag echter niet op punt P liggen, want alle vliegvelden liggen op verschillende afstanden van elkaar. Dit betekent dat vliegveld C op een hoek van minstens 60 graden van B moet liggen.

Zo zien we in dat er maximaal 5 vliegtuigen op A kunnen landen.

Uitwerking opgave 7

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 2, 3 en 5 is 30. Elke 30 seconden zijn er $15 + (10 - 5) + (6 - 3 - 1) = 22$ tikken te horen. Nu delen we de $999 = 1000 - 1$ tikken op in blokjes van 22 tikken en een rest:

$$999 = 45 \cdot 22 + 9.$$

Voor de laatste 9 tikken zijn nog 12 seconden nodig. De gevraagde tijd wordt dan

$$45 \cdot 30 + 12 = 1362 \text{ seconden.}$$

Uitwerking opgave 8

Het idee is om de twee traagste personen samen te laten oversteken. A en B steken samen over en A brengt de lamp terug. Dan steken C en D samen over en B brengt de lamp terug. Ten slotte steken A en B samen over. De totale tijd is $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ minuten.

Een alternatief is dat in de tweede stap B terugloopt met de lamp. Dan moet in de vierde stap A de lamp terugbrengen naar de beginplek. Ook dat duurt $2 + 2 + 10 + 1 + 2 = 17$ minuten.

Nu willen we inzien dat het niet sneller kan. Om vier personen naar de overkant te krijgen moeten er eerst twee naar de overkant, dan één terug met de lamp, dan weer twee erover, nogmaals één terug de lamp en dan de laatste twee naar de overkant. Dat zijn sowieso vijf overtochten.

Stel dat C en D niet tegelijkertijd oversteken of meer dan één keer oversteken. Dat kost al $10 + 5 = 15$ minuten en elk van de andere drie overtochten duurt minstens een minuut, dus in totaal kost dit zeker $15 + 1 + 1 + 1 = 18$ minuten.

Om het in hoogstens 17 minuten voor elkaar te krijgen is het dus noodzakelijk dat C en D samen oversteken en dat ze verder niet in actie komen. Hierbij kunnen C en D niet als eersten oversteken, want dan zou één van hen de lamp terug moeten brengen. Ook kunnen C en D niet als laatsten oversteken, want dan een van hen in de stap daarvoor de lamp terug moeten brengen.

Dus het snelste is dat C en D in de middelste van de vijf stappen de hangbrug oversteken. In de eerste stap moeten A en B dan oversteken, en in de tweede stap moet A of B teruglopen met de lamp. Dan dus C en D erover, en in de vierde stap brengt B of A de lamp terug naar de startplek. Het eindigt ermee dat A en B nogmaals samen oversteken. Op beide manieren duurt het in totaal 17 minuten.

Uitwerking opgave 9

Er zijn 3 kwadraten van één cijfer en 6 kwadraten van twee cijfers, namelijk de kwadraten van 4,5,6,7,8,9. Het grootste kwadraat van drie cijfers is $31^2 = 961$, dus er zijn $31 - 9 = 22$ kwadraten van drie cijfers. De kwadraten van 32 tot en met 44 hebben allemaal vier cijfers, en dat zijn $44 - 31 = 13$ kwadraten. Het totaal aantal cijfers in de rij wordt daarmee

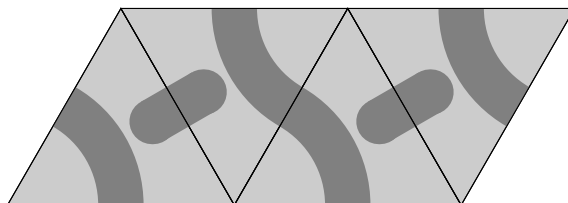
$$3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 22 \cdot 3 + 13 \cdot 4 = 3 + 12 + 66 + 52 = 133.$$

Uitwerking opgave 10

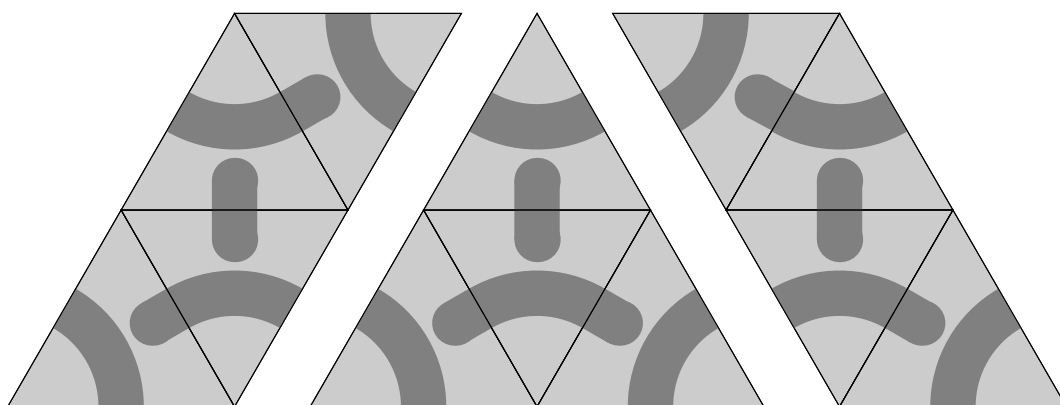
Noem een zijde van een bedrukte driehoek *stoppend* als de streep in het midden ervan ergens in de driehoek stopt, en *doorlopend* als deze streep naar een andere zijde loopt.

Stel dat we de driehoeken aan elkaar hebben geplakt tot een tetraëder. We kunnen nu als volgt over de driehoeken lopen. We starten bij een willekeurige driehoek. Vervolgens doen we telkens een *stap*, als volgt. Vanaf de driehoek waar we ons bevinden, gaan we naar de driehoek die grenst aan de stoppende zijde. Dit proces kunnen we tot in het oneindige herhalen, maar al heel snel gaan we zo rondjes lopen over de driehoeken. Dit rondje kan bestaan uit 2, 3 of 4 driehoeken.

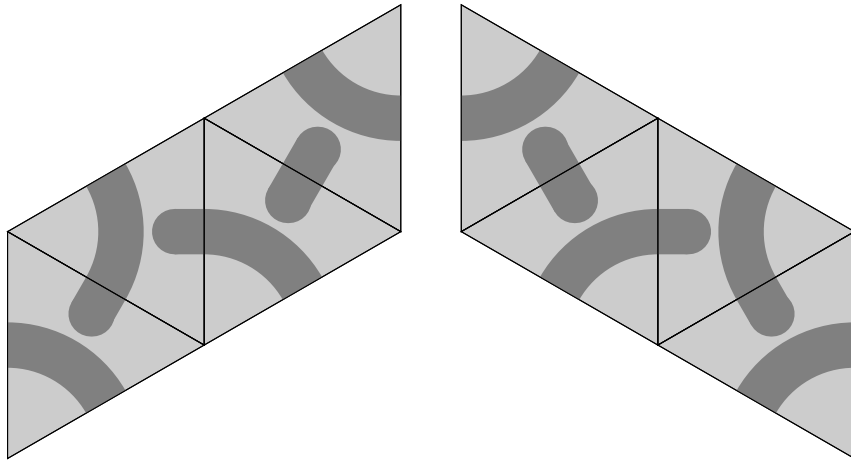
- *Er zijn 2 rondjes van 2 driehoeken.*
Dit kan op slechts 1 manier.



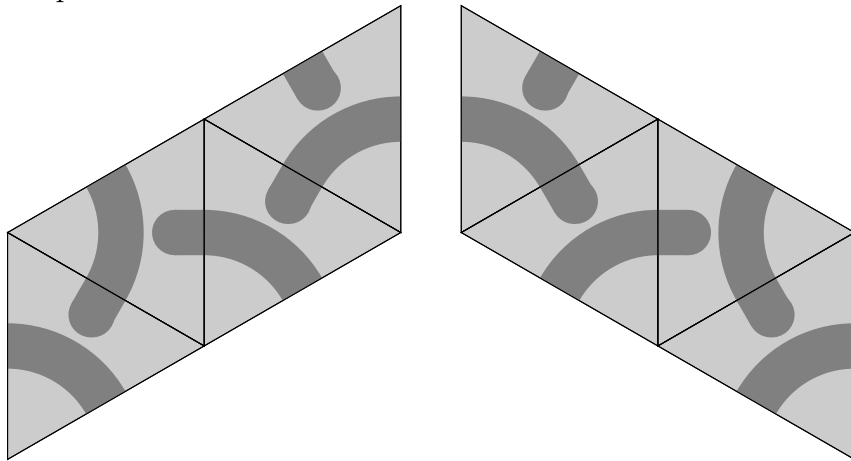
- *Er is 1 rondje van 2 driehoeken, welke in ten hoogste 1 stap bereikt wordt.*
Dit kan op 3 manieren.



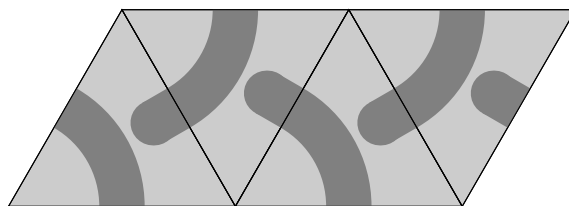
- *Er is 1 rondje van 2 driehoeken, welke in ten hoogste 2 stappen bereikt wordt.*
Dit kan op 2 manieren.



- *Er is een rondje van drie driehoeken.*
Dit kan ook op twee manieren.



- *Er is 1 rondje van 4 driehoeken.*
Dit kan op slechts 1 manier.



In totaal zijn er dus 9 verschillende tetraëders.

Uitwerking opgave 11

Noem de onbekende inhoud x . Door drie glazen van het mengsel in het vat te vervangen door drie glazen water, wordt de concentratie wijn in het vat vermenigvuldigd met een factor $\frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$. De oplossing is dus de reële wortel van de vergelijking

$$\left(1 - \frac{3}{x}\right)^3 = \frac{729}{1000}.$$

Dat geeft $1 - 3/x = 9/10$, dus $3/x = 1/10$ en $x = 30$.

Uitwerking opgave 12

Zonder afbreuk te doen aan de algemeenheid, mogen we veronderstellen dat de rechthoek hoogte 1 heeft. We zoeken dan de breedte van de rechthoek, die we met x noteren. De meest linkse en de meest rechtse cirkel hebben allebei straal $1/2$. Om symmetrieredenen hebben de bovenste en de onderste cirkel ook dezelfde straal, zeg R . Noteer de straal van de middelste cirkel met r .

Je kunt x nu bijvoorbeeld berekenen uit het volgende stelsel (de eerste gelijkheid drukt de breedte van de rechthoek op twee manieren uit, de tweede de hoogte en de derde is de stelling van Pythagoras in de driehoek gevormd door de middelpunten van de linkse, middelste en bovenste cirkel):

$$\begin{aligned}2 + 2r &= x, \\4R + 2r &= 1, \\(1/2 + r)^2 + (r + R)^2 &= (1/2 + R)^2.\end{aligned}$$

Uitwerking opgave 13

Bekijk alle oneven getallen in $[-n, n]$. De som van drie oneven getallen is weer oneven en zeker niet nul. Dus deze verzameling voldoet aan de voorwaarden. Er zitten $n + 1$ elementen in. Het is een stuk lastiger om te bewijzen dat dit aantal maximaal is.

Stel dat we een V hebben die aan de voorwaarden voldoet en die meer dan $n + 1$ elementen heeft. Aangezien $0 + 0 + 0 = 0$, zit 0 niet in V .

Het aantal paren $\{v, w\}$ in $\{-n, \dots, n\} \setminus \{0\}$ met $v + w = 1$ is $n - 1$, alleen 1 en $-n$ zitten niet in een dergelijk paar. In deze $n - 1$ paren zitten $2n - 2$ elementen. Daarvan bevat V er meer dan $(n + 1) - 2 = n - 1$, want alles uit $V \setminus \{1, -n\}$ valt daaronder. Met het duiventilprincipe zien we dat er tenminste één dergelijk paar bestaat dat geheel in V ligt. Oftewel, er zijn $v, w \in V$ met $v + w = 1$. De eigenschap van V zegt dan dat -1 niet in V ligt.

Door te kijken naar paren met som -1 , kunnen we op dezelfde manier afleiden dat 1 niet in V zit.

Stel nu dat we, voor een gegeven natuurlijk getal k , hebben bewezen dat V geen elementen van $\{1 - k, 2 - k, \dots, k - 2, k - 1\}$ bevat. De paren $\{v, w\}$ in

$$\{-n, \dots, n\} \setminus \{1 - k, 2 - k, \dots, k - 2, k - 1\} \quad \text{met} \quad v + w = k$$

zijn $(2k, -k), (2k + 1, -k - 1), \dots, (n, k - n)$. Dat zijn $n + 1 - 2k$ paren. Het aantal elementen van V dat niet in een dergelijk paar ligt is hoogstens

$$(2n + 1) - (2k - 1) - 2(n + 1 - 2k) = 2n + 2 - 2k - 2n - 2 + 4k = 2k.$$

Dus V bevat meer dan $n + 1 - 2k$ elementen uit dergelijke paren. Met het duiventilprincipe zien we wederom dat tenminste één van die paren geheel in V ligt. Dus V bevat elementen v, w met $v + w = k$. Daaruit volgt dat $-k$ niet in V zit. Door te kijken naar paren met som $-k$ kunnen we ook afleiden dat k niet in V ligt.

Dus V bevat geen elementen van $\{-k, 1-k, \dots, k-1, k\}$. Dan voeren we hetzelfde argument nogmaals uit en vinden we dat ook $k+1$ en $-1-k$ niet in V liggen, enzovoort. Uiteindelijk moeten we concluderen dat V leeg is, wat natuurlijk absurd is.

Uitwerking opgave 14

Als de straal van de cirkel r is, dan volgt uit het raken aan de parabool in het bodempunt dat het middelpunt van de cirkel $(0, r)$ is. Punten (x, y) op de cirkel voldoen aan $(r - y)^2 + x^2 = r^2$, dus

$$x^2 = r^2 - (r - y)^2 = r^2 - (r^2 - 2ry + y^2) = (2r - y)y$$

en $|x| = \sqrt{(2r - y)y}$. Aangezien de cirkel geheel boven de grafiek van $y = x^2$ ligt, moet voor een gegeven y (tussen 0 en $2r$) de positieve x -coördinaat op de cirkel kleiner (of gelijk) aan de positieve x -coördinaat op de parabool zijn. Oftewel

$$\sqrt{(2r - y)y} \leq \sqrt{y}.$$

Kwadrateren en delen door y geeft $2r - y \leq 1$, dus $y \geq 2r - 1$. Dit moet gelden voor elke y tussen 0 en $2r$, dus $2r - 1 \leq 0$. De grootste straal waarvoor dit geldt is $r = 1/2$.

Uitwerking opgave 15

We zullen laten zien dat er op een dergelijk feest met $n \geq 4$ bezoekers er altijd zeker $n - 3$ alle anderen kennen. Dit aantal kan ook echt bereikt worden: neem drie personen A, B, C die elkaar niet kennen, en $n - 3$ personen die elkaar en A, B, C kennen.

Eerst bekijken we het geval $n = 4$. De aanname zegt dat er minstens één persoon is die alle drie anderen kent.

Nu nemen we aan dat we de gevraagde uitspraak al hebben bewezen voor alle feesten met ten hoogste k bezoekers. Bekijk een feest met $k + 1$ bezoekers, zodat er van elke vier minstens eentje de andere drie kent. Noem er een bezoeker A . Door A even weg te laten krijgen we een groep G van k feestgangers.

Geval 1: alle personen in G kennen elkaar

Laat B, C, D personen van G zijn en bekijk het kwartet A, B, C, D . Per aanname kent A er minstens één daarvan, zeg D . Dan kent D alle personen op het feest.

Bekijk nu de groep G' van k feestgangers, die bestaat uit iedereen behalve D (met A er wel bij). Volgens onze aanname zijn er minstens $k - 3$ personen in G' die iedereen in G' kennen. Die $k - 3$ kennen ook D , dus samen met D geeft dat $k - 2$ personen die iedereen op het feest kennen.

Geval 2: niet alle personen in G kennen elkaar

Zeg dat B en C elkaar niet kennen. Door onze aanname zijn er minstens $k - 3 \geq 1$ personen van G die alle mensen van G kennen, laat D daar een van zijn. Bekijk het viertal A, B, C, D . Aangezien B en C elkaar niet kennen, moet A of D de andere drie kennen. In het bijzonder kennen A en D elkaar, dus D kent alle personen op het feest. Het argument uit het vorige geval toont aan dat minstens $n - 2$ personen op het feest iedereen kennen.

Uitwerking opgave 16

We geven de punten op de lijn aan met reële getallen, zodat het hol in 0 ligt. Zij x_n de plek van het konijn na n sprongen. In formulevorm springt het konijn volgens

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{als } |x| \leq 1, \\ -1/x_n & \text{als } |x| > 1. \end{cases}$$

In het bijzonder geldt $|x_{n+1}| \leq 2$. Om uit te komen op een x_{n+1} met $1 \leq |x_{n+1}| \leq 2$ is er slechts één mogelijke positie x_n , namelijk $x_{n+1}/2$. Voor $0 < |x_{n+1}| < 1$ zijn er twee posities van waar naar x_{n+1} wordt gesprongen, namelijk $x_n = x_{n+1}/2$ en $x_n = -1/x_{n+1}$.

Gegeven is $|x_3| = 0.8$. We bekijken alleen $x_3 = 0.8$, de reeksen voor $x_3 = -0.8$ kunnen daaruit verkregen worden door alles met -1 te vermenigvuldigen. De mogelijkheden zijn:

$$\begin{array}{ccccccc} & x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 \\ -8/5 & & \searrow & & & & & \\ -5/16 & \rightarrow & & -5/8 & \rightarrow & -5/4 & \searrow & \\ 1/10 & \rightarrow & & 1/5 & \rightarrow & 2/5 & \rightarrow & 4/5 \\ -5 & & \nearrow & & & & & \\ ?? & \rightarrow & & -5/2 & \nearrow & & & \end{array}$$

Hierbij kan $x_1 = -5/2$ niet bereikt worden omdat $|-5/2| > 2$. Dus er blijven 4 reeksen over, en samen met de opties voor $x_3 = -0.8$ levert dat 8 reeksen.

Uitwerking opgave 17

Als $a \neq 1$, dan kunnen we de waarde verkleinen door $a = 1$ te nemen. Om dezelfde reden kunnen we $c = b + 1$ en $d = 10$ nemen. Dan wordt de waarde

$$\frac{1}{b} + \frac{b+1}{10} = \frac{10 + b(b+1)}{10b}.$$

Nu kunnen we alle mogelijkheden voor b afgaan, van 2 tot en met 8. Dat levert waarden

$$\frac{13}{10}, \frac{11}{15}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{13}{15}, \frac{33}{35}, \frac{41}{40}.$$

De kleinste hiervan is $11/15$, wat optreedt als $a = 1, b = 3, c = 4, d = 10$.

Uitwerking opgave 18

We schrijven het begingetal als $n = a_1 = 1 + 2^m b$ waarbij b oneven is en $m \geq 0$. Als $m = 0$, dan is a_1 even en stopt het rijtje direct. Als $m > 0$, dan

$$a_2 = (2 + 2^m b)/2 = 1 + 2^{m-1} b.$$

Op dezelfde manier volgt dat $a_j = 1 + 2^{m+1-j} b$. Dit rijtje stopt bij $j = m + 1$. We willen dat er 2022 termen zijn, dus dan moeten we $m = 2021$ en $n = 1 + 2^{2021} b$ nemen. De kleinste n waarvoor dit werkt krijgen we met $b = 1$, namelijk $n = 1 + 2^{2021}$.

Uitwerking opgave 19

We plaatsen de tetraëder in een assenstelsel, zodat O de oorsprong is, en OA, OB, OC op de positieve x -as, y -as, z -as liggen. We schrijven $a = |OA|, b = |OB|, c = |OC|$.

Het deel van de tetraëder met een vaste x -coördinaat is een driehoek in het (y, z) -vlak met hoekpunten $(0, 0), (b(1 - x/a), 0), (0, c(1 - x/a))$. Die driehoek heeft oppervlakte $b(1 - x/a)c(1 - x/a)/2$.

De inhoud van de tetraëder kan berekend worden door de oppervlakten van deze driehoeken te integreren langs OA :

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^a \frac{b(1 - x/a)c(1 - x/a)}{2} dx &= \frac{bc}{2} \int_{x=0}^a \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= \frac{bc}{2} \left[x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = \frac{bc}{2} (a - a + a/3) = \frac{abc}{6} \end{aligned}$$

Aangezien $c = 1 - a - b$, kunnen we het volume ook uitdrukken als

$$I(a, b) = ab(1 - a - b)/6 = (ab - a^2b - ab^2)/6.$$

Dit moeten we maximaliseren onder de voorwaarden dat $0 \leq a, b \leq 1$. Als a of b gelijk aan 0 of 1 zijn dan wordt de inhoud 0, dus we mogen ook de voorwaarden $0 < a, b < 1$ opleggen. Als we a en b zo gekozen hebben dat $I(a, b)$ maximaal is, dan zijn de afgeleiden van $I(a, b)$ naar a en b allebei 0. Dat geeft de condities

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dI}{da}(a, b) = \frac{b - 2ab - b^2}{6} = \frac{b}{6}(1 - 2a - b), \\ 0 &= \frac{dI}{db}(a, b) = \frac{a - a^2 - 2ab}{6} = \frac{a}{6}(1 - a - 2b). \end{aligned}$$

Aangezien $a, b > 0$, zijn deze condities equivalent met

$$1 - 2a - b = 0 = 1 - a - 2b.$$

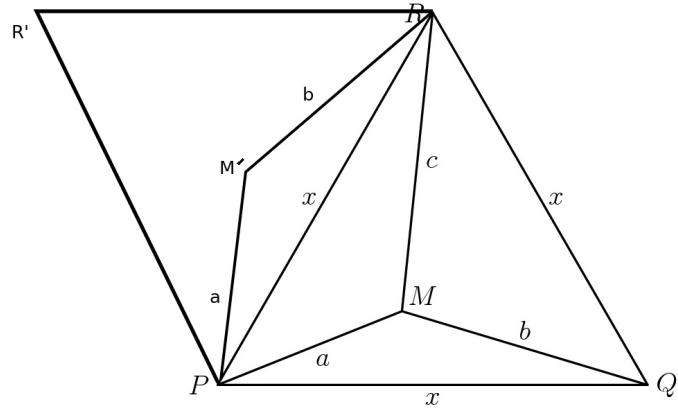
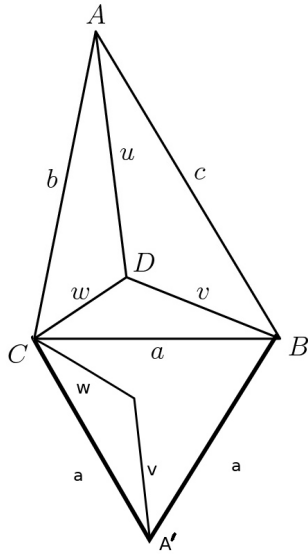
Hier is het verschil van de linker- en de rechterkant $a - b$, dus moet $a = b$. Dan volgt $a = b = 1/3$ en ook $c = 1 - a - b = 1/3$.

Gezochte maximale volume wordt daarmee $abc/6 = 1/(3^3 \cdot 6) = 1/162$.

Uitwerking opgave 20

Voeg aan de onderkant van de linker figuur hierboven een gelijkzijdige driehoek toe. Draai $\triangle CDB$ kloksgevijs 60° om C en teken dat erbij. Dat geeft de linker figuur hieronder.

Draai $\triangle PQR$ tegen de klok in 60° en teken dat erbij hierboven. Voeg de gedraaide versie van $\triangle PMQ$ toe, dat geeft de rechter figuur hieronder.



Door hoekenjagen zien we dat het punt A' op het verlengde van het lijnstuk AD ligt. Daaruit volgt dat $ABA'C$ congruent met $RMPM'$ is. In het bijzonder $x = |AA'|$. Aan de linkerkant is AA' opgebouwd uit stukjes van lengte u , w , v .