
WISKUNDE-ESTAFETTE KUN 2002

Uitwerkingen

1

Omdat de totale waarde van het geld in je zak niet zou veranderen als elke van de vijfthalermunten drie thaler minder waard zou worden en elke van de eenthalermunten met één thaler zou worden opgewaardeerd, heb je driemaal zoveel eenthalermunten in je zak als vijfthalermunten. We proberen: drie eenthalermunten en één vijfthalerstuk.

Omdat het totaalbedrag in je zak tien thaler minder zou worden als dat ene vijfthalerstuk devalueert tot één thaler en alle tweethalerstukken dat ook zouden doen, moet je in dat geval zes tweethalermunten op zak hebben. Die tien munten zouden een gemeenschappelijke waarde hebben van $(3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 5 =)$ twintig thaler; zouden ze alle tien waarde 5 hebben, dan zou het totaal bedrag €50 zijn, inderdaag €30 meer! $(3, 6, 1)$ is dus een (mogelijke) broekzakinhoud.

Als je in plaats van $(3, ?, 1)$ probeert $(6, ?, 2)$ vind je dat ook $(6, 2, 2)$ een mogelijke oplossing is. (Drie of meer vijfthalerstukken blijkt onmogelijk te zijn.)

Een ‘wiskundigere’ oplossing: Zeg: er zijn a eenthalermunten, b tweethalermunten en c vijfthalermunten in je zak. Dan hebben we het volgende stelsel vergelijkingen voor positieve gehele getallen a, b, c :

$$\begin{aligned}a + b + c &= a + 2b + 5c - 10 \\2a + 2b + 2c &= a + 2b + 5c \\5a + 5b + 5c &= a + 2b + 5c + 30.\end{aligned}$$

Dat stelsel is gelijk aan het stelsel

$$\begin{aligned}b + 4c &= 10 \\a &= 3c \\4a + 3b &= 30\end{aligned}$$

en dus met

$$\begin{aligned}b + 4c &= 10 \\a &= 3c \\(12c + 3b &= 30).\end{aligned}$$

We hebben nu twee vergelijkingen met drie onbekenden! Bedenk: de onbekenden zijn positief en geheel! Neem $c = 1$; dan $a = 3$ en $b = 6$. Neem $c = 2$; dan $a = 6$ en $b = 2$. c kan niet groter dan 2 zijn, want dan is $b = 10 - 4c$ negatief. Er zijn dus precies twee oplossingen: $(3, 6, 1)$ en $(6, 2, 2)$.

2

We schrijven de laatste cijfers op van $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots$. We vinden achtereenvolgens de cijfers 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, \dots enz. Elke macht van 3^4 (dat wil zeggen $3^0, 3^4, 3^8, 3^{12}, \dots$) heeft laatste cijfer 1; 3^{2000} dus ook. Het laatste cijfer van 3^{2002} is dus 9. We doen hetzelfde met de machten van 2 en vinden 1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \dots enz. We zien dat dat 2 het laatste cijfer is van 2^1 , van 2^5 , van $2^9, \dots, 2^{2001}$. Het laatste cijfer van 2^{2002} is dus 4. Dat van $3^{2002} - 2^{2002}$ is daarom 5.

3

Je moet twee dingen bedenken:

- als x gelijk is aan 2, dan is $1 - x$ gelijk aan -1
- als x gelijk is aan -1 , dan is $1 - x$ gelijk aan 2

Door x gelijk te nemen, aan 2 en vervolgens aan -1 , krijg je twee vergelijkingen met als onbekenden $f(2)$ en $f(-1)$, namelijk:

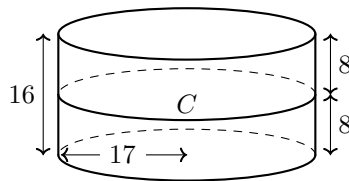
$$\begin{aligned} f(2) + 2 \cdot f(-1) &= 2 \\ f(-1) + (-1) \cdot f(2) &= -1 \end{aligned}$$

Dit stelsel is gelijkwaardig met

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{4}{3} \\ f(-1) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

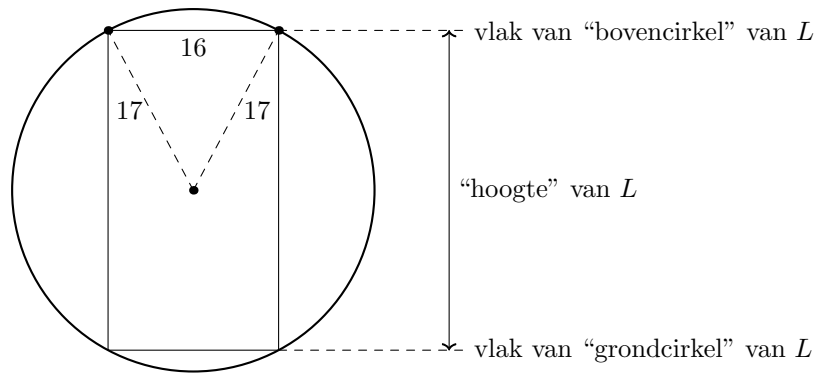
Dus: $f(2) = \frac{4}{3}$.

4



Een plaatje van S (de staande cilinder) met een doorsnede van S op halve hoogte (cirkel C). De liggende cilinder L pas precies in S ; de straal van de grondcirkel van L is dus $8 (= \frac{1}{2} \cdot 16)$.

De doorsnede op halve hoogte van S en L te samen ziet er dus zo uit:



Met behulp van de stelling van Pythagoras vinden we dat de halve hoogte van L gelijk is aan $\left(\sqrt{17^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 16\right)^2} =\right) 15$. De inhoud van L is dus: $(\pi \cdot 8^2 \cdot (2 \cdot 15) =) 1920\pi$.

5

Er zijn (oneindig) veel verzamelingen V met de gegeven twee eigenschappen! We zoeken onder al die verzamelingen er een waarvan de som van de zesenvijftig elementen ervan zo klein mogelijk is. Omdat elk vijftiental uit zo'n verzameling op zijn minst een even getal bevat, kan zo'n verzameling niet meer dan veertien oneven getallen bevatten. De verzameling die we zoeken bevat nu de veertien oneven getallen met de kleinste som en $(56 - 14 =)$ tweeneveertig even getallen met de kleinste som (merk op dat je als je minder oneven getallen neemt de totale som altijd hoger wordt, omdat er meer even dan oneven getallen in de verzameling zitten). De gevraagde som is dus:

$$(1 + 3 + 5 + \cdots + 27) + (2 + 4 + 6 + \cdots + 84)$$

en dat is $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 28 + \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 86 = 2002$.

6

Het probleem kan vertaald worden in de volgende vermenigvuldiging waarin de onbekenden a, b, c, d de cijfers 3, 5, 8, 9 voorstellen, allen verschillend.

$$\begin{array}{r} 1 \quad b \quad 6 \quad a \\ 4 \quad \times \\ \hline 7 \quad d \quad c \quad 2 \end{array}$$

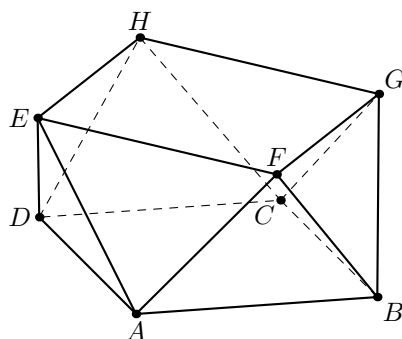
Voor a kan alleen 3 of 8 worden ingevuld; je moet voor a niet 8 nemen, want dan komt voor c het cijfer 7, en dat is al gebruikt. Dus: $a = 3$. Dan wordt c het cijfer 5; we hebben dan

$$\begin{array}{r} 1 \quad b \quad 6 \quad 3 \\ 4 \quad \times \\ \hline 7 \quad d \quad 5 \quad 2 \end{array}$$

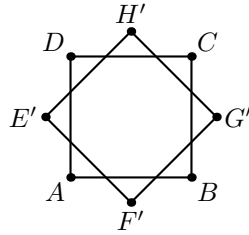
Er blijven twee mogelijkheden: $(b = 8, d = 9)$ en $(b = 9, d = 8)$. Alleen $b = 9$ en $d = 8$ geeft een correcte vermenigvuldiging.

7

Hier een plaatje van het doosje:



$ABCD$ en $EFGH$ zijn vierkanten met zijden van lengte 1. FAB , BFG , GBC , CGH , HCD , DHE , EDA en AEF zijn gelijkzijdige driehoeken waarvan de zijden ook lengte 1 hebben. We projecteren E, F, G, H op het grondvlak $ABCD$; hun projecties noemen we E', F', G', H' . $E'F'G'H'$ is nu ook een vierkant met zijden 1 (en diagonalen die $\sqrt{2}$ lang zijn, net als de diagonalen van $ABCD$). Bovendien ligt G' even ver van B als van C (omdat $GB = GC$); en ook $E'A = E'D$, $F'A = F'B$, $H'C = H'D$. Een plaatje van de vierkanten $ABCD$ en $E'F'G'H'$ zie er zo uit:



De afstand van G' tot zijde BC , dat wil zeggen, de afstand van G' tot het midden van die zijde, is kennelijk gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$. De afstand van G zelf tot dat midden is gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (de hoogte van de gelijkzijdige driehoek GBC). Met behulp van de stelling van Pythagoras rekenen we uit:

$$\text{de hoogte van het doosje} = GG' = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

8

Het lampje in elk van de vier hoekvelden wordt driemaal van toestand veranderd (namelijk bij omzetting van zijn eigen schakelaar en die van elk van zijn twee buurschakelaars); die vier lampjes zullen dus ten slotte *aan* zijn. Het lampje op elk van de $(4 \cdot 6 =)$ vierentwintig randvelden die geen hoekveld zijn veranderen viermaal van toestand en zullen dus *uit* zijn. Alle overige $(6 \cdot 6 =)$ zesendertig lampjes veranderen vijfmaal van toestand en zullen dus *aan* zijn. Ten slotte zullen dus veertig $(= 4 + 36)$ lampjes branden.

9

We weten:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

(en ook $5^2 + 12^2 = 13^2$, en $8^2 + 15^2 = 17^2$, enz). Dus hebben we

$$3^2 \cdot 5^8 + 4^2 \cdot 5^8 = 5^2 \cdot 5^8$$

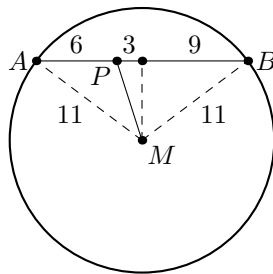
(en ook $5^2 \cdot 13^8 + 12^2 \cdot 13^8 = 13^2 \cdot 13^8$, en $8^2 \cdot 17^8 + 15^2 \cdot 17^8 = 17^2 \cdot 17^8$, enz). Dus geldt

$$(3 \cdot 5^4)^2 + (4 \cdot 5^4)^2 = 5^{10}$$

(en ook $(5 \cdot 13^4)^2 + (12 \cdot 13^4)^2 = 13^{10}$ en $(8 \cdot 17^4)^2 + (15 \cdot 17^4)^2 = 17^{10}$, enz). Als drietallen p, q, r vinden we dus

$$\begin{array}{lll} p, q = 3 \cdot 5^4, & 4 \cdot 5^4, & r = 5 \\ p, q = 5 \cdot 13^4, & 12 \cdot 13^4, & r = 13 \\ p, q = 8 \cdot 17^4, & 15 \cdot 17^4, & r = 17 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

10



De cirkel heeft diameter 22, dus zijn straal is 11 lang. De afstand van M tot het midden van de koorde AB is gelijk aan $\sqrt{11^2 - 9^2}$; en dus vinden we: $MP = \sqrt{(11^2 - 9^2) + 3^2} = 7$.

11

Kortheidshalve noteren we hetgeen A denkt (onze wiskundelerares wordt op 10 april 28 jaar) met het volgende drierijtje: $(10, 4, 28)$. Netzo doen we dit voor B, C, D, E , we vinden:

A $(10, 4, 28)$

B $(11, 5, 30)$

C $(11, 5, 28)$

D $(11, 4, 28)$

E $(10, 4, 30)$

Een van de vijf drierijtje is het juiste; in elk rijtje komt op z'n minst een juist getal (op de juist plaats) voor. Daaruit volgt dat $(10, 4, 28)$ niet het goede rijtje is, want dan zou het rijtje van B op alle plaatsen fout zijn. Evenzo is $(11, 5, 30)$ niet juist (anders zou A alles fout hebben); is $(11, 5, 28)$ niet juist (anders heeft E alles fout) en is $(10, 4, 30)$ niet juist (anders heeft C alles fout). Alleen het rijtje van D kan dus goed zijn. Hun idool wordt op 11 april 28 jaar.

12

We bekijken het rijtje huisnummers, d.w.z. het rijtje van natuurlijke oneven getallen

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 49, 51, 53, 55, 57.$$

Dat zijn negenentwintig getallen (namelijk evenveel als in het rijtje $2, 4, \dots, 58$ en dat zijn er evenveel als in het rijtje $1, 2, \dots, 29$). De oneven getallen kleiner dan het getal x hebben dezelfde som als de oneven getallen (uit het bovenstaande rijtje) groter dan het getal x ; Het dubbele van die som is dus juist de som van alle negenentwintig getallen minus x . De som van de negenentwintig getallen is de helft van $29 \cdot 58 (= 841)$. Een gokje, misschien is x wel 41: We berekenen

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 37 + 39 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (1 + 39) = 400$$

en ook

$$43 + 45 + 47 + \dots + 57 + 59 = 841 - 400 - 41 = 400$$

en jawel hoor de opmerkelijke bewoner woont op 41.

Je kunt dit probleem natuurlijk ook ‘netjes’ doen, door de volgende vergelijking op te lossen:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (x - 4) + (x - 2) = \frac{1}{2} \cdot (841 - x)$$

voor het =-teken staat de som van $\frac{x-1}{2}$ opeenvolgende oneven getallen de bovenstaande vergelijking is dus equivalent met de vergelijking:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot (1 + (x-2)) = \frac{1}{2}(841 - x),$$

en die is weer equivalent met $(x-1)^2 = 1682 - 2x$, en dus met $x^2 + 1 - 1682$; er is dus precies één positief oneven getal dat voldoet, namelijk $\sqrt{1681} = 41$.

13

Omdat $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{14}$ is $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$ gelijk aan $\frac{14}{9}$; en omdat voor elke hoek x geldt dat $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, geldt voor de hoek α :

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{14}{9} - 1 = \frac{5}{9};$$

en dus:

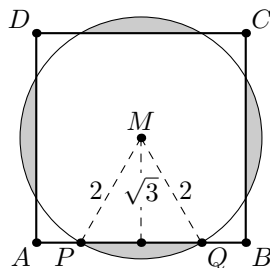
$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

$\sin \alpha - \cos \alpha$ is dus óf $\frac{2}{3}$ óf $-\frac{2}{3}$. Omdat α tussen 0° en 45° ligt, is $\sin \alpha$ kleiner dan $\cos \alpha$. Dus: $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

14

We passen telkens de stelling van Pythagoras toe en vinden omdat $(AB)^2 = 121$ dat $(AB_1)^2 = 121 - 4$; $(AB_2)^2 = 121 - 4 - 4 = 121 - 2 \cdot 4$; $(AB_3)^2 = 121 - 3 \cdot 4$; ...; $(AB_{11})^2 = 121 - 11 \cdot 4$; ...; $(AB_{29})^2 = 121 - 29 \cdot 4 = 5$; $(AB_{30})^2 = 121 - 30 \cdot 4 = 1$; Als je het lijnstuk AB_{29} om A cirkelt, vind je nog een snijpunt met de zijde CD ; het punt B_{30} ontstaat dus nog. Het lijnstuk AB_{30} heeft lengte 1 en is dus te kort om bij omcirkelen om A een snijpunt met de zijde CD op te leveren. Het rangnummer van het laatste punt is dus 30.

15



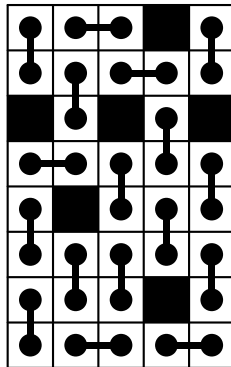
Gegeven is $MP = MQ = 2$ en de hoogte van $\triangle PQM$ is $\sqrt{3}$. $\triangle PQM$ is dus een gelijkzijdige driehoek.

De cirkelsector MPQ heeft dus als oppervlakte: het zesde deel van de oppervlakte van de cirkelschijf met middelpunt M en straal 2 en is dus gelijk aan $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 2^2$.

Het driehoekige vlakstuk MPQ heeft als oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$. De oppervlakte van elk van de vier segmenten is dus $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$.

Elk van de zeventien tweelingen bezet een woning met een even en een woning met een oneven nummer (je kunt ook zeggen, na in het plaatje de woningen schaakbordsgewijs gekleurd te hebben: ‘een zwart en een wit veld’). Aan drie woningen met een oneven nummer (zwarte velden) is te zien dat ze onbezet zijn. De overige drie vrije woningen moeten dus even nummers hebben (moeten wit zijn); omdat die drie op een en dezelfde woonlaag liggen kunnen ze alleen liggen op woonlaag 2 òf woonlaag 4 òf woonlaag 6 òf woonlaag 8. Maar woonlagen 4 en 8 bevatten elk nog op zijn hoogst twee vrije woningen. De drie onbezette woningen liggen dus òf op woonlaag 2 òf op woonlaag 6. Als ze op 2 zouden liggen, dan zouden de woningen 1 en 2 bewoond worden door een tweeling, en óók de woningen 4 en 5, en dan zou woning 8 bezet moeten zijn door de tweelingzuster/broer van de bewoner van woning 3, maar woning 8 staat leeg, dus dat kan niet.

De drie onbezette woningen kunnen dus alleen maar liggen op woonlaag 6. En inderdaad als de woningen 26, 28 en 30 leegstaan, kunnen de vierendertig bezette woningen door zeventien tweelingen bewoond worden op de beschreven wijze. Kijk maar:



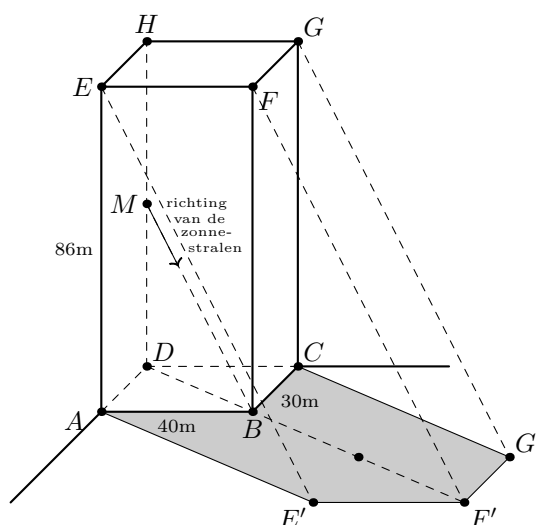
17

Je vindt de schaduw die de zon van het gebouw op het plein werpt door de punten E , F , G evenwijdig met de lijn MB op het plein te projecteren.

De projectie F' van F ligt op de lijn BD en wel zo dat het lijnstuk DF' driemaal zo lang is als het lijnstuk DB : dus $|BF'| = 100\text{m}$.

De projectie G' van G is het vierde hoekpunt van het parallellogram dat B als hoekpunt en het lijnstuk CF' als een diagonaal heeft.

De projectie E' van E is het vierde hoekpunt van het parallellogram dat B als hoekpunt en het lijnstuk AF' als diagonaal heeft.



De schaduw op het plein is dus de zeshoek $AE'F'G'CB$. De afstand tussen de lijnen BC en $F'G'$ is tweemaal zo groot als die tussen de lijnen AD en BC ; de oppervlakte van $BF'G'C$ is dus $30\text{m} \times 80\text{m}$ ($= 2400\text{m}^2$). De afstand tussen de lijnen AB en $E'F'$ is tweemaal zo groot als die tussen de lijnen DC en AB ; de oppervlakte van $AE'F'B$ is dus $40\text{m} \times 60\text{m}$ ($= 2400\text{m}^2$). De oppervlakte van de schaduw op het plein is dus 4800m^2 .

18

Zeg: de afstand tussen 'beneden' en 'boven' is A meter. Je loopsnelheid is dan $\frac{A}{30}$ m/sec. De snelheid van de (rollende) roltrap is dan $\frac{A}{60}$ m/sec. Je snelheid als je loopt op de rollende roltrap is dus $(\frac{A}{30} + \frac{A}{60})\text{m/sec}$ ($= \frac{A}{20}\text{m/sec}$). Je hebt dus 20 seconden nodig om lopende op de rollende roltrap boven te komen.

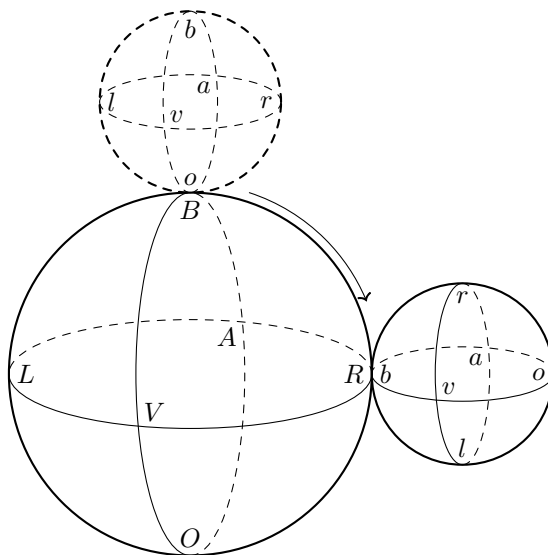
19

Je moet nu even bedenken dat, met de gegeven betekenis van de letters a , b , c , elk van de getallen $abcabc$ gelijk is aan $abc \times 1001$. Alle vijfenzeventig getallen van de verzameling zijn dus deelbaar door 1001. En omdat c even is, zelfs deelbaar door 2002. En zelfs, omdat b een van de cijfers 0, 2, 4, 6, 8 en c een van de cijfers 0, 4, 8 is door 4004.

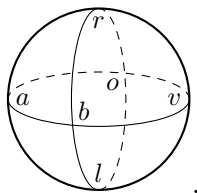
Omdat 100 en 104 als grootste gemeenschappelijke deler 4 hebben is de grootste gemeenschappelijke deler van $100 \cdot 1001$ en $104 \cdot 1001$, die beide tot de verzameling behoren, gelijk aan 4004. De grootste gemeenschappelijke deler van alle getallen uit de verzameling is daarom ook 4004.

20

Omdat de straal van de grote bol het dubbele is van die van de kleine is de boog BR tweemaal zo lang als een halve grote cirkel van de kleine bol. Dus, als we de kleine bol langs boog BR naar R rollen, zal punt b samenvallen met R . De stand van de kleine bol zal dan zijn:



Rollen we de kleine bol nu over boog RV naar V , dan zal o gaan samenvallen met V . De stand van de kleine bol is dan:



Tenslotte rollen we de kleine bol over boog VB naar B ; b zal dan gaan samenvallen met B . De eindstand van de kleine bol is dus:

