

---

---

**WISKUNDE-ESTAFETTE RU 2005**

---

---

**Uitwerkingen**

---

---

**1**

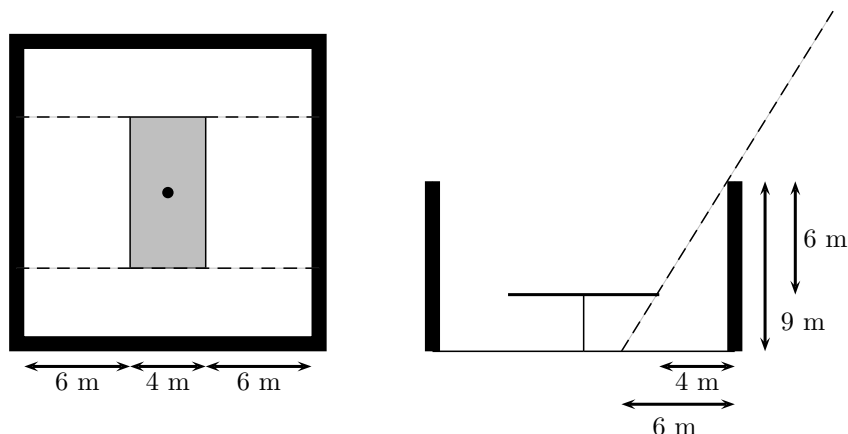
We proberen alle mogelijkheden van klein naar groot:

- $p = 1$  is uitgesloten: dan zou elke dag hetzelfde resultaat geven.
- $p = 2$  is uitgesloten: dan zouden dag 1 en dag 5 hetzelfde resultaat geven.
- $p = 3$  is uitgesloten: dan zouden dag 16 en dag 19 hetzelfde resultaat geven.
- $p = 4$  is uitgesloten: dan zouden dag 1 en dag 5 hetzelfde resultaat geven.
- $p = 5$  is uitgesloten: dan zouden dag 9 en dag 19 hetzelfde resultaat geven.
- $p = 6$  is uitgesloten: dan zouden dag 1 en dag 19 hetzelfde resultaat geven.
- $p = 7$  is uitgesloten: dan zouden dag 5 en dag 19 hetzelfde resultaat geven.
- $p = 8$  is uitgesloten: dan zouden dag 1 en dag 9 hetzelfde resultaat geven.
- $p = 9$  is uitgesloten: dan zouden dag 1 en dag 19 hetzelfde resultaat geven.
- $p = 10$  is uitgesloten: dan zouden dag 9 en dag 19 hetzelfde resultaat geven.
- $p = 11$  is uitgesloten: dan zouden dag 5 en dag 16 hetzelfde resultaat geven.

$p = 12$  is echter niet uitgesloten, om de eenvoudige reden dat er geen twee waarneemdagen zijn die een veelvoud van 12 dagen uit elkaar liggen.

**2**

De rand van de muur en de rand van de parasol bepalen in het zijaanzicht een lijn die de bodemlijn snijdt in het punt dat de rand van het gebied met permanente schaduw aangeeft. Deze lijn is in de rechter figuur hieronder met een stippellijn aangegeven.



Door gelijkvormigheid van driehoeken blijkt dat dit punt zich  $\frac{9}{9-3} \times \frac{16-8}{2} = 6$  meter van de muur bevindt. Het gebied met permanente schaduw is dus  $16 - 2 \times 6 = 4$  meter breed, en uiteraard 8 meter lang.

3

De grote kubus bestaat uit 10 lagen, die elk bestaan uit een vierkant van 10 bij 10 kleine kubusjes. Van de kubusjes uit de bovenste laag is er geen onzichtbaar. Van de andere 9 lagen zijn de kubusjes onzichtbaar die niet langs de rand van het vierkant liggen; deze vormen een  $8 \times 8$  vierkant. In totaal zijn er dus  $9 \times 8 \times 8 = 576$  kubusjes onzichtbaar en dus 424 gedeeltelijk zichtbaar.

4

Schrijf  $d$  voor de dikte van het papier, en  $n$  voor het aantal windingen.

De lengte van de eerste winding ligt tussen  $4\pi$  en  $(2 + d)2\pi$ , die van de tweede winding tussen  $(2 + d)2\pi$  en  $(2 + 2d)2\pi$ , die van de derde winding tussen  $(2 + 2d)2\pi$  en  $(2 + 3d)2\pi$ , enzovoorts. De lengte van de laatste winding ligt tussen  $(2 + (n - 1)d)2\pi$  en  $(2 + nd)2\pi$ . Alles bij elkaar is de lengte tussen  $(2n + \frac{(n-1)n}{2}d)2\pi$  en  $(2n + \frac{n(n+1)}{2}d)2\pi$ .

Bovendien is  $nd = \frac{10-4}{2} = 3$ . De totale lengte ligt dus tussen  $(7n - 3)\pi$  en  $(7n + 3)\pi$ . Gegeven is dat de totale lengte  $250 \times 11 \text{ cm} = 2750 \text{ cm}$  bedraagt. Als we  $\pi$  benaderen door  $\frac{22}{7}$  en dus  $\frac{2750}{\pi}$  vervangen door 875, dan maken we een fout van minder dan 0,0005 deel, dus minder dan 0,5. Dus  $7n$  wijkt minder dan 3,5 van 875 af. We mogen dus 125 antwoorden.

5

Het laatste cijfer van  $2^n$  is periodiek in  $n$ . Het is 2 voor  $n = 1, 5, 9, 13, \dots$ , het is 4 voor  $n = 2, 6, 10, 14, \dots$ , het is 8 voor  $n = 3, 7, 11, 15, \dots$  en het is 6 voor  $n = 4, 8, 12, 16, \dots$ . In het bijzonder is het 2 voor  $n = 2005$ , omdat dat een viervoud plus 1 is.

6

Als je de eerste paar getallen probeert dan raad je al gauw dat een positief geheel getal  $n$  een verschil van kwadraten is precies als het aantal factoren 2 dat  $n$  heeft niet 1 bedraagt.

- Stel dat  $n$  geen factor 2 heeft, anders gezegd dat  $n$  oneven is, zeg  $n = 2m + 1$ . Dan kunnen we  $n$  in de gewenste vorm schrijven als  $n = (m + 1)^2 - m^2$ .
- Stel dat  $n$  één enkele factor 2 heeft. Dan kan  $n$  niet van de vorm  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  zijn met  $a$  en  $b$  geheel. Immers dan moet minstens een der factoren  $a - b$  en  $a + b$  even zijn, maar dan is de andere ook even, en dan is  $n$  een viervoud.
- Stel dat  $n$  twee of meer factoren 2 heeft, zeg  $n = 4m$  met  $m$  geheel. Dan kunnen we  $n$  in de gewenste vorm schrijven als  $n = (m + 1)^2 - (m - 1)^2$ .

We zien dus dat van de 999 getallen  $1, 2, 3, 4, \dots, 998, 999$  er 250 niet verschillen van kwadraten zijn, en de andere 749 wel.

7

De verbinding  $BF$  moet in een van beide richtingen gebruikt worden, omdat anders  $B$  niet wordt aangedaan. Evenzo moet  $FJ$  worden gebruikt, omdat anders  $J$  niet wordt

aangedaan. Dus kunnen de verbindingen  $EF$  en  $CF$  en  $FG$  niet gebruikt worden. Hetzelfde geldt voor  $CG$  en  $GH$ . Als we deze verbindingen schrappen ontstaat een tienhoek  $AEIGDCBFJH$ ; deze kan in twee richtingen gevolgd worden.

8

De tweemachten zijn van de vorm  $2^a$  met  $a = 1, 2, \dots, 29$ . De derdemachten zijn van de vorm  $b^3$  met  $b = 1, 2, \dots, 2^{10} - 1 = 1023$ . Als een getal zowel tweemacht als derdemacht is dan is het van de vorm  $2^{3c} = (2^c)^3$  met  $c = 1, 2, \dots, 9$ . Dus zijn er  $1023 + 29 - 9 = 1043$  van zulke getallen.

9

Zij  $w(n)$  het woord in de  $n$ -de generatie. Dan komt het hele woord  $w(n-1)$  voor als beginstuk van  $w(n)$ . In het bijzonder is de twintigste letter van  $w(100)$  dezelfde als de twintigste letter van  $w(9) = abcaababcaabcaababcaababc$ .

*Sterker: het woord  $w(n)$  krijg je door de woorden  $w(n-1)$  en  $w(n-3)$  achter elkaar te plaatsen. Dat bewijs je eenvoudig met volledige inductie:*

- $w(4) = abca$  bestaat inderdaad uit  $w(3) = abc$  en  $w(1) = a$ .
- Stel dat  $w(n)$  van de veronderstelde vorm is, en maak  $w(n+1)$  door in  $w(n)$  de aangegeven vervangingen uit te voeren. Dat kun je doen door zowel in het beginstuk  $w(n-1)$  van  $w(n)$  als in het eindstuk  $w(n-3)$  van  $w(n)$  die vervangingen uit te voeren. Daarbij ontstaan respectievelijk  $w(n)$  en  $w(n-2)$ .

10

Omdat Alfred en Bart tegengestelde uitspraken doen, sprak een van hen de waarheid. Dat betekent dat Cor niet de waarheid sprak. Dat wetende is Eds uitspraak gelijkwaardig met 'Daan zegt niet de waarheid'.

Omdat Daan en Ed tegengestelde uitspraken doen, sprak een van hen de waarheid. Dat betekent dat Fred niet de waarheid sprak. Dat wetende is Hermans uitspraak gelijkwaardig met 'Gerard zegt niet de waarheid'.

Omdat Gerard en Herman tegengestelde uitspraken doen, sprak een van hen de waarheid. Dat betekent dat Ibrahim niet de waarheid sprak.

Er waren dus precies 3 mensen die de waarheid spraken; één uit Alfred en Bart, één uit Daan en Ed, en één uit Gerard en Herman.

11

Schrijf  $h$  voor het aantal hoekpunten,  $v$  voor het aantal vierkanten, en  $d$  voor het aantal driehoeken.

Elk hoekpunt bepaalt 3 vierkanten, maar zo komen we elk vierkant 4 keer tegen, omdat elk vierkant 4 hoekpunten heeft. Er geldt dus  $\frac{3h}{4} = v$ .

Elk hoekpunt bepaalt 1 driehoek, maar zo komen we elke driehoek 3 keer tegen, omdat elke driehoek 3 hoekpunten heeft. Er geldt dus  $\frac{h}{3} = d$ . Omdat gegeven is dat  $d = 8$  vinden we  $h = 24$  en  $v = 18$ .

*We kunnen hier zelfs nog meer over zeggen. Schrijf  $r$  voor het aantal ribben. Omdat bij elk hoekpunt 4 vlakken (drie vierkanten en één driehoek) bij elkaar komen, komen er ook 4*

ribben bij elkaar. Zo komen we elke ribbe 2 keer tegen, omdat elke ribbe in twee hoekpunten eindigt. We vinden zo dat  $r = \frac{4h}{2} = 48$ .

Dit is in overeenstemming met een beroemde stelling van Euler, die zegt dat voor nette veelvlakken geldt dat  $h - r + z = 2$ , waar  $z$  het totaal aantal zijvlakken is, hier dus  $v + d = 26$ .

12

In ieder doosje zit minstens één knikker. We hebben nog 6 ‘extra’ knikkers te verdelen. Dat moet zó dat een doosje niet meer dan 3 extra knikkers bevat. We moeten dus kijken op welke manieren we 6 kunnen schrijven als som van getallen 1, 2 of 3. De volgorde van de termen doet er niet toe. We schrijven de aantallen in dalende volgorde op:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 + 3, & 3 + 2 + 1, & 3 + 1 + 1 + 1, & 2 + 2 + 2, \\ 2 + 2 + 1 + 1, & 2 + 1 + 1 + 1 + 1, & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

Totaal 7 mogelijkheden.

13

In de beschrijving is sprake van twee tijdstippen: nu, en ‘toen Grietje...’. Laten we zeggen dat het laatstgenoemde tijdstip  $v$  jaar in het verleden ligt. Laten we de huidige leeftijden van Hans en Grietje  $h$  respectievelijk  $g$  noemen. Dan kunnen we de gegevens als volgt opschrijven:

$$\begin{aligned} h + g &= 18 \\ h &= 2(g - v) \\ g - v &= 2(h - v) \end{aligned}$$

Op een standaard manier vind je hieruit de oplossing  $h = 8$ ,  $v = 6$ ,  $g = 10$ .

*Dit is een aftreksel van een puzzel van Sam Loyd.: Mary is tweemaal zo oud als Ann was toen Mary half zo oud was als Ann zal zijn wanneer Ann driemaal zo oud is als Mary was toen Mary driemaal zo oud was als Ann. Samen zijn ze 44 jaar.*

14

Schrijf  $Z$  voor het snijpunt van  $XY$  met  $GF$ , en noteer  $x = AX$  en  $y = DY$ .

*Eerste methode:*

Uit de gelijkvormigheid van  $AXGZ$  met  $AXDY$  blijkt dat

$$GZ = AX + \frac{AG}{AD}(DY - AX) = x + \frac{1}{3}(y - x).$$

De gemiddelde hoogte van het rechthoekig trapezium  $AXGZ$  is dus  $x + \frac{1}{6}(y - x)$ , en dat moet gelijk zijn aan de helft van de hoogte van rechthoek  $AEFG$ , namelijk 2. De gemiddelde hoogte van het rechthoekig trapezium  $AXDY$  is  $x + \frac{1}{2}(y - x)$ , en dat moet gelijk zijn aan de helft van de hoogte van rechthoek  $ABCD$ , namelijk 4.

We vinden zo de twee eisen

$$5x + y = 12 \quad \text{en} \quad x + y = 8$$

Daaruit los je gemakkelijk op dat  $x = 1$  en  $y = 7$ .

*Tweede methode:*

Een lijn halveert een rechthoek in oppervlakte als hij beide zijden evenver van het hoekpunt snijdt (en dus door het middelpunt gaat). In dit geval  $AX = FZ = CY$ , waar  $Z$  het snijpunt is van  $XY$  met  $GF$ . Dit levert de twee eisen

$$8 - y = x = 4 - \left( x + \frac{1}{3}(y - x) \right)$$

met weer de oplossing  $x = 1$ ,  $y = 7$ .

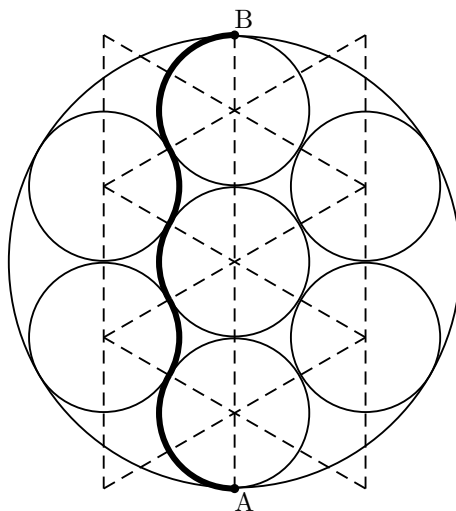
15

We willen positieve gehele getallen  $x$  en  $y$  vinden zo dat  $27x + 37y$  liefst gelijk is aan 1000 en als dat niet kan eventueel 999 enzovoorts. In feite levert  $x = 11$ ,  $y = 19$  precies 1000 op. We laten nu zien hoe je die oplossing kunt vinden.

Enerzijds is  $y$  hoogstens  $\frac{1000}{37}$ . Anderzijds volgt uit  $27x + 37y = 1000$  dat een negenvoud plus 1 moet zijn (namelijk  $y = 1 + 9(111 - 3x - 4y)$ ). Dus moet  $y$  gelijk zijn aan 1 of 10 of 19; alleen de laatste mogelijkheid voldoet.

16

In onderstaande figuur is een zo kort mogelijke wandeling vet getekend.



De middelpunten van de cirkelvormige bloemperken vormen een patroon van gelijkzijdige driehoeken, met hoeken van  $60^\circ$ . Elk van deze hoeken bepaalt een stuk pad in de vorm van een cirkelboog van lengte  $\frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 10$  m. De hele route van  $A$  naar  $B$  bestaat uit 7 dergelijke stukken.

17

Schrijf  $x$  voor het aantal computers en  $y$  voor het aantal leerlingen. In het eerste geval zijn er  $\frac{1}{2}y$  computers nodig, en dat is blijkbaar 3 minder dan  $x$ . In het tweede geval zijn er  $\frac{1}{3}y$  computers nodig, en dat is blijkbaar 2 meer dan  $x$ . We komen dus uit op de vergelijkingen

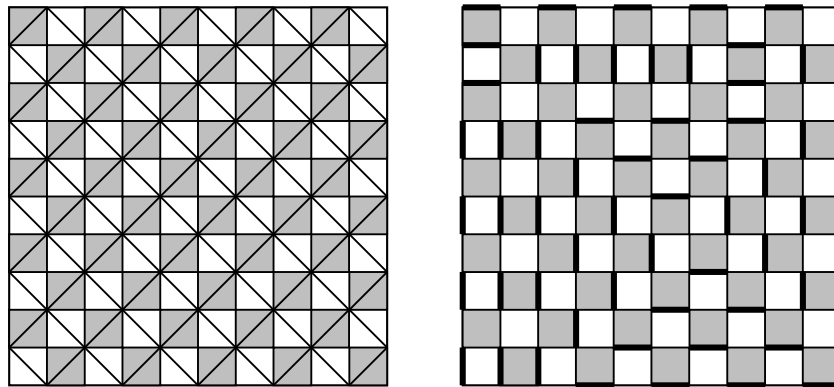
$\frac{1}{2}y = x + 3$ ,  $\frac{1}{3}y = x - 2$ . Vermenigvuldigen met 2 respectievelijk 3 geeft  $y = 2x + 6$  respectievelijk  $y = 3x - 6$ . Aftrekken levert nu  $x = 12$ .

18

Ad kan links of rechts naast An zitten. Dan zijn er nog 4 plaatsen te verdelen. Vanuit Ad en An gezien zitten Bob en Bep links of rechts van Cor en Carla. Vanuit Ad en An gezien zit Bob links of rechts van Bep, en Cor links of rechts van Carla. In totaal is er vier keer een keuze te maken uit twee mogelijkheden, en deze keuzes beïnvloeden elkaar niet. In totaal zijn er dus  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  mogelijkheden.

19

De linker figuur hieronder laat zien hoe je de diagonaaltjes kunt trekken op een manier waarbij 60 hoekpunten eindpunten van een diagonaaltje zijn.



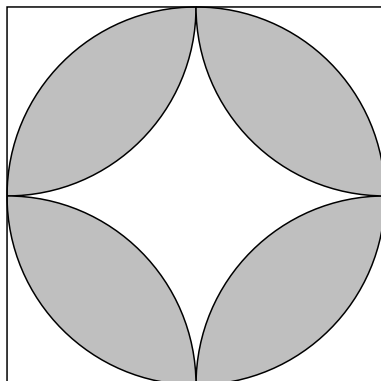
We laten nu zien dat het niet met minder kan.

Kies uit de 121 hoekpunten 60 paren zó dat de twee leden van een paar in horizontale of verticale richting bureu zijn (er blijft dus één hoekpunt over). Dat kan op vele duizenden manieren; in de rechter figuur hierboven is een manier aangegeven.

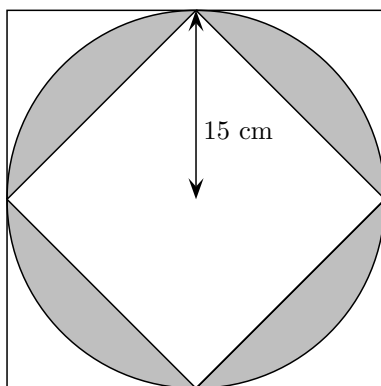
Elk paar kun je opvatten als de zijde van een veld (vaak zelfs van twee velden) en beide mogelijke diagonaaltjes (dus ook het gekozen diagonaaltje) van dat veld eindigt in een van de leden van het paar. De conclusie is dat voor elk paar minstens één van de leden eindpunt is van een diagonaaltje. Er zijn dus minstens 60 hoekpunten eindpunt van een diagonaaltje.

20

Er is een patroon dat zich steeds herhaalt: 10 keer in horizontale richting, en 6 keer in verticale richting. Dat patroon is hieronder geschetst en bestaat uit een hele en vier kwart lichte tegels, en vier donkere tegels.



We kunnen dus evengoed nagaan welk deel hiervan donker is. Stel dat we de binnenste helft van het donkere gedeelte licht maken, zoals hieronder geschetst:



Dan is het duidelijk dat de oppervlakte van het nieuwe donkere deel het verschil is tussen de oppervlakte van een cirkelschijf met straal van 15 cm en van een ingesloten vierkant. Dat verschil bedraagt  $\pi r^2 - 2r^2$ , met  $r = 15$  cm. De oppervlakte van het oorspronkelijke donkere deel was dus  $(2\pi - 4)r^2$ . Dit moeten we 60 keer nemen.