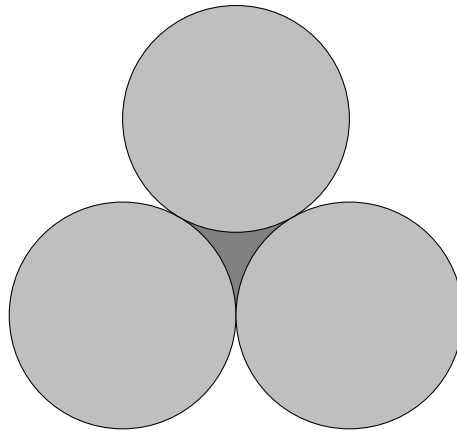

WISKUNDE-ESTAFETTE 2014

60 Minuten voor 20 opgaven.

Het totaal aantal te behalen punten is 500

1 (20 punten)

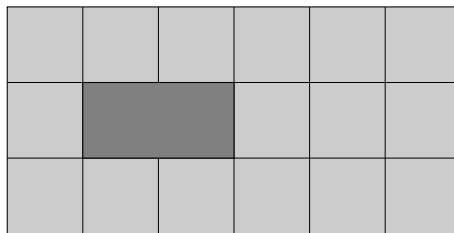
Gegeven zijn drie aan elkaar rakende cirkels met straal 1.



Hoe groot is de (donkergrijze) oppervlakte die door de cirkels ingesloten wordt?

2 (30 punten)

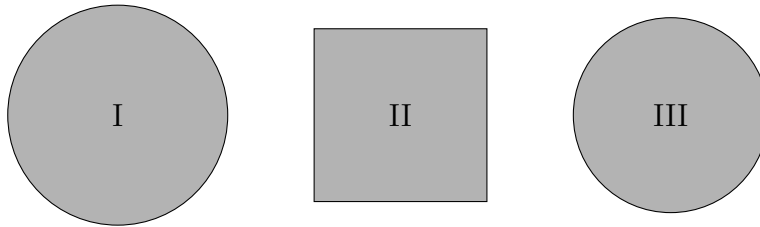
We willen een rechthoek van 3 bij 6 betegelen met negen dominostenen van 1 bij 2. De eerste dominosteen is al gelegd, zoals in onderstaande figuur is aangegeven.



Hoeveel patronen van negen dominostenen zijn er nog mogelijk bij het afmaken van de betegeling?

3 (20 punten)

Cirkel I en vierkant II hebben dezelfde omtrek. Vierkant II en cirkel III hebben dezelfde oppervlakte.



Verder is de diameter van cirkel I gelijk aan 2.

Wat is de diameter van cirkel III?

4 (30 punten)

De letters A, B, C, D, E en F staan op een rijtje, en wel als volgt.

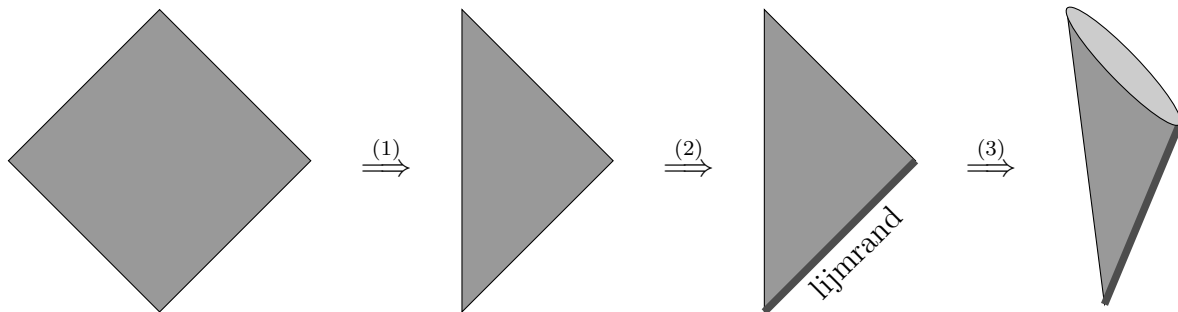
- (1) F staat links van D, maar E niet.
- (2) D en F staan aan dezelfde kant van C.
- (3) B en C staan naast elkaar.
- (4) D staat dichterbij C dan bij F.

Wat is de volgorde van de letters, van links naar rechts?

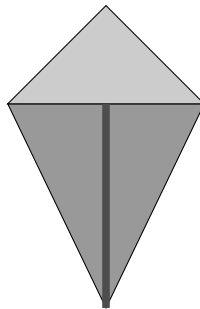
5 (20 punten)

Van een vierkant blad papier kun je een frietzak maken. Dit gaat als volgt.

- (1) Vouw het langs een diagonaal dubbel.
- (2) Plak twee kanten aan elkaar.
- (3) Duw het open.



Je kunt de frietzak zó platdrukken dat je een vlieger krijgt.



Deze vlieger heeft twee stompe hoeken die even groot zijn.

Hoeveel graden is elk van beide stompe hoeken?

6 (30 punten)

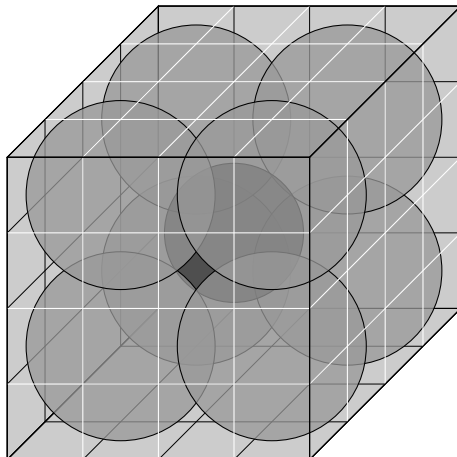
Gegeven zijn twee getallen, beide tussen 10 en 99, waarvoor het volgende geldt.

- Tenminste één van de getallen is een kwadraat.
- Tenminste één van de getallen is een 17-voud.
- De som van de cijfers van één van de getallen is 7.
- Precies één van de getallen is groter dan 50.
- De som van beide getallen is deelbaar door 11.

Wat zijn deze twee getallen?

7 (20 punten)

In de hoeken van een kubus met ribbe 4 kun je acht bollen met straal 1 kwijt.



In het midden van de kubus is nog plaats voor een bol die de eerste acht bollen raakt.

Hoe groot is de straal van die bol?

8 (30 punten)

In de volgende optelsom zijn sommige cijfers vervangen door een sterretje. Verder stelt abc telkens hetzelfde getal van drie cijfers voor.

$$\begin{array}{r} 2123 \\ \underline{abc} + \\ **** \\ \underline{abc} + \\ **5* \\ \underline{abc} + \\ 32*7 \end{array}$$

Wat is het getal abc ?

9 (20 punten)

Bij ieder hoekpunt van een kubus wordt een getal geplaatst. Vervolgens wordt, voor elk van de zes zijvlakken van de kubus, de som uitgerekend van de getallen bij de hoekpunten van dat zijvlak. Vijf van de zes uitkomsten zijn 18, 20, 25, 22 en 21.

Wat is de zesde uitkomst?

10 (30 punten)

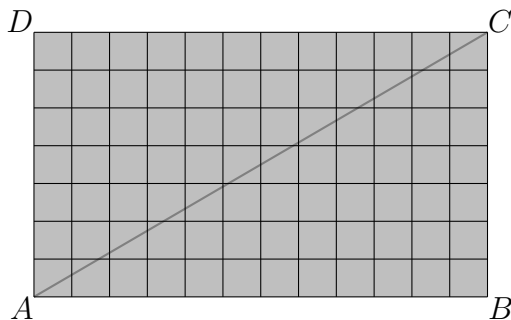
Er geldt: $4^2 + 8^2 - 4 \times 8 = 48$.

Naast 4 en 8 zijn er nog twee cijfers a en b , allebei ongelijk aan 0 (en ook niet 4 en 8), zó dat $a^2 + b^2 - a \times b$ gelijk is aan het tweecijferige getal waarvan a het eerste en b het tweede cijfer is.

Wat is dat tweecijferige getal?

11 (20 punten)

De rechthoek $ABCD$ is geplaveid met vierkante tegeltjes. Langs de zijde AB liggen 75 tegeltjes en langs de zijde BC liggen 45 tegeltjes.

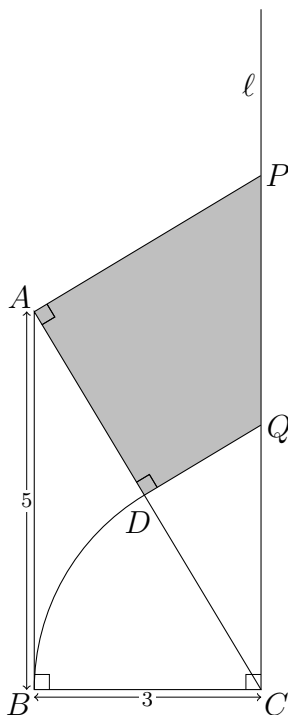


Hoeveel middelpunten van tegeltjes liggen op de diagonaal AC ?

[De tekening klopt niet. Voegdiktes zijn verwaarloosbaar.]

12 (30 punten)

Driehoek ABC is een rechthoekige driehoek met een rechte hoek bij B . De lengte van lijnstuk AB is 5 en die van lijnstuk BC is 3. Het punt D ligt op lijnstuk AC en op de cirkelboog met middelpunt C die door B gaat.

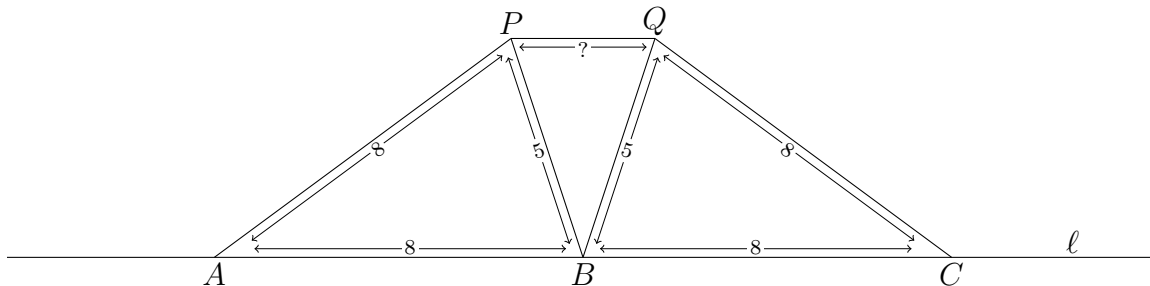


Door C is een lijn ℓ getrokken, loodrecht op lijnstuk BC . De loodlijnen op lijnstuk AC die door A en D gaan, snijden lijn ℓ in respectievelijk P en Q .

Wat is de oppervlakte van (de lichtgrijze) vierhoek $ADQP$?

13 (20 punten)

Gegeven is een vlak met punten A , B , C , P en Q . De punten A , B en C liggen op een horizontale lijn ℓ . A ligt 8 eenheden links van B en C ligt 8 eenheden rechts van B .



De punten P en Q liggen boven ℓ en hebben afstand 5 tot B . Verder hebben de lijnstukken AP en CQ beide lengte 8.

Wat is de afstand tussen P en Q ?

14 (30 punten)

Gegeven is een rij van 16 blokken met letters erop, zoals hieronder is aangegeven.



De blokken staan in alfabetische volgorde. Door meerdere malen twee blokken onderling te verwisselen, kunnen we het woord



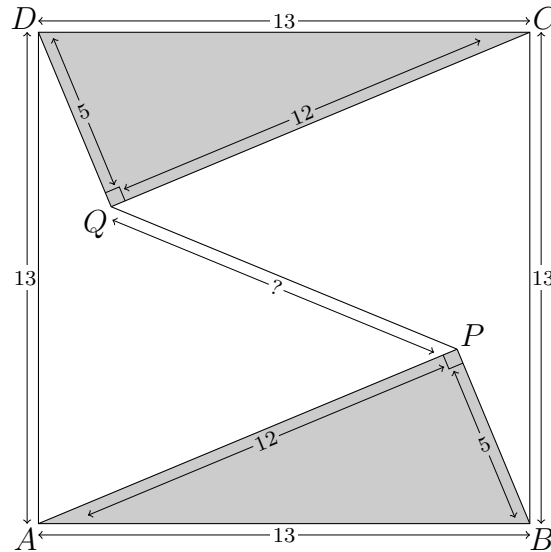
maken.

Wat is het kleinst mogelijke aantal van zulke verwisselingen waarmee we dit kunnen bereiken?

[Voor DHNO naar HOND is het antwoord 2: verwissel eerst D met O en daarna O met H.]

15 (20 punten)

Vierkant $ABCD$ heeft zijde 13 en bevat punten P en Q , zó dat driehoek ABP en driehoek CDQ rechthoekig zijn.

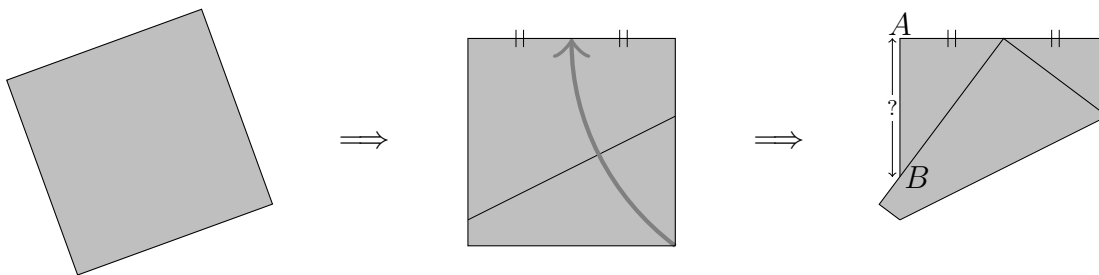


De ligging van P en Q is zoals aangegeven in bovenstaande figuur.

Wat is de afstand tussen P en Q ?

16 (30 punten)

We hebben een vierkant blaadje van 30 cm bij 30 cm. We leggen dit recht op tafel en vouwen de hoek rechtsvoor naar het midden van de achterste zijde.



De hoek linksachter noemen we A . B is het punt op de linker zijde waar de voorzijde komt te liggen na het vouwen.

Wat is de afstand tussen A en B ?

[De tekening is niet op schaal.]

17 (20 punten)

We kunnen in de breuk $\frac{16}{64}$ de zessen wegstrepen om een correcte vereenvoudiging te maken:

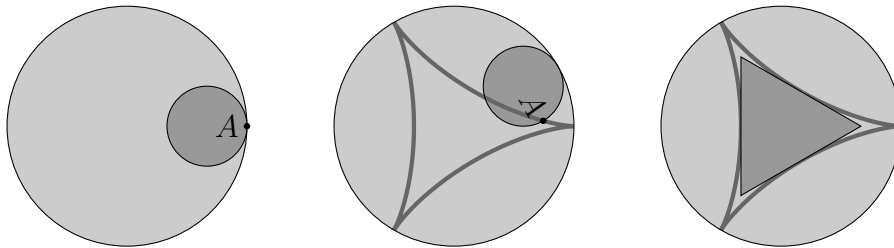
$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

Onder de breuken waarvan de noemer kleiner dan 100 is, en de teller kleiner dan de noemer, zijn er vier waarbij je dit kunstje kunt uithalen. Dat wil zeggen, je kunt hetzelfde cijfer ongelijk aan nul wegstrepen in teller en noemer, zonder dat het resultaat van de breuk verandert.

Deze breuken zijn $\frac{16}{64}$, $\frac{49}{98}$, $\frac{19}{95}$ en – wat is de vierde?

18 (30 punten)

Gegeven is een cirkel met straal 3 die aan de binnenkant door een andere cirkel met straal 1 wordt geraakt. Laat A het punt van de cirkel met straal 1 zijn waar de cirkel met straal 3 wordt geraakt.



We laten nu de cirkel met straal 1 over de cirkel met straal 3 rollen, aan de binnenkant en zonder glijden. De baan die het punt A hierbij beschrijft is een zogenaamde *deltoïde*.

Wat is de oppervlakte van de grootst mogelijke gelijkzijdige driehoek binnen deze deltoïde?

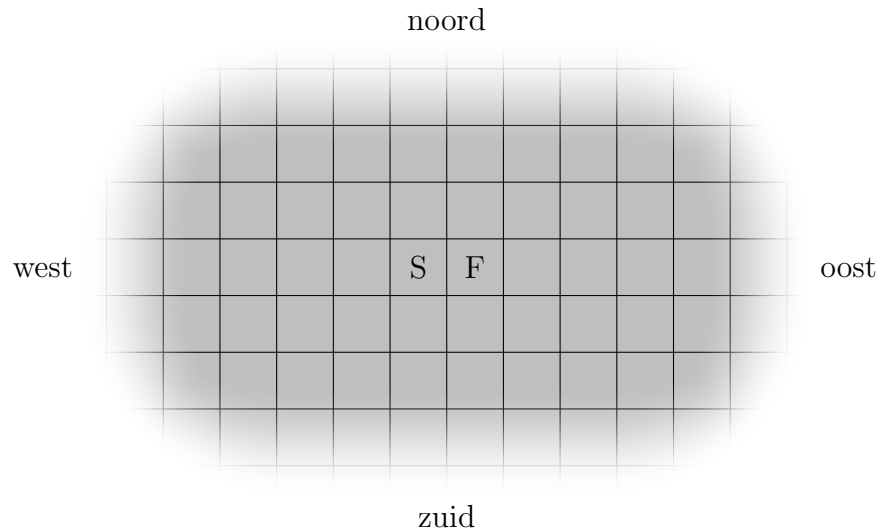
19 (20 punten)

Uit de cijfers 1, 2, 4, 4, 6, 7, 8, 9 vormen we twee getallen van elk vier cijfers, zó dat het (positieve) verschil tussen die twee getallen zo klein mogelijk is.

Hoe groot is dat verschil?

20 (30 punten)

Kris en Kras hebben een pion en een speelbord dat in vierkante vakjes is verdeeld. Van het bord is hier slechts een stukje getekend; in werkelijkheid strekt het zich in alle richtingen eindeloos uit.



Twee vakjes zijn voorzien van een letter; daarnaast zijn de windrichtingen hierboven aangegeven.

Ze doen een spel waarbij ze om de beurt een zet doen, en wel als volgt.

- Kris zet de pion ofwel 3 vakjes naar het oosten ofwel 5 vakjes naar het westen.
- Kras zet de pion ofwel 2 vakjes naar het noorden ofwel 7 vakjes naar het zuiden.

Bij het begin staat de pion op het vakje met de letter S. Vervolgens gaat Kris de eerste zet doen.

Wat is het kleinste aantal zetten waarin ze de pion naar het vakje met de letter F kunnen brengen?

[Het gaat hier dus niet om een spel met een winnaar.]