

---

---

**WISKUNDE-ESTAFETTE RU 2006**

**Uitwerkingen**

---

---

**1**

De som van de getallen  $1, 2, \dots, 16$  is 136. Dus voor elk viervlak leveren de grensvlakken samen 34. De niet zichtbare getallen op  $V_4$  moeten dus som  $34 - 16 - 4 = 14$  hebben. Omdat we alleen 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ter beschikking hebben zijn er maar twee mogelijkheden:

- De getallen op  $V_4$  zijn 5 en 9.  
De niet zichtbare getallen op  $V_1$  hebben som 20. Omdat we alleen 6, 7, 8, 10, 11, 12 ter beschikking hebben kunnen het alleen 8 en 12 zijn. De niet zichtbare getallen op  $V_2$  hebben som 18. Omdat we alleen 6, 7, 10, 11 ter beschikking hebben kunnen het alleen 7 en 11 zijn. Voor  $V_3$  blijven nu de getallen 6 en 10 over.
- De getallen op  $V_4$  zijn 6 en 8.  
De niet zichtbare getallen op  $V_1$  hebben som 20. Omdat we alleen 5, 7, 9, 10, 11, 12 ter beschikking hebben kunnen het alleen 11 en 9 zijn. De niet zichtbare getallen op  $V_2$  hebben som 18. Omdat we alleen 5, 7, 10, 12 ter beschikking hebben is dit niet mogelijk.

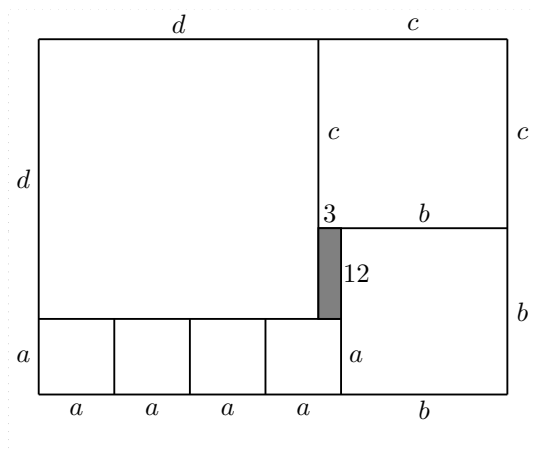
We hadden natuurlijk ook met  $V_1$  kunnen beginnen.

**2**

Er zijn 8 mogelijkheden om de koning te plaatsen. Na elke keuze blijven er nog 7 mogelijkheden over om de dame te plaatsen. Voor de eerste en tweede looper zijn er zo 6 respectievelijk 5 mogelijkheden, maar omdat ze niet te onderscheiden zijn levert dit maar  $(6 \times 5)/2 = 15$  mogelijkheden voor de twee lopers samen. Evenzo hebben we  $(4 \times 3)/2 = 6$  mogelijkheden voor de paarden en nog maar  $(2 \times 1)/1 = 1$  mogelijkheid voor de torens: die vullen de laatst overgebleven twee plekken. In totaal zijn er dus  $8 \times 7 \times 15 \times 6 \times 1 = 5040$  mogelijkheden.

3

We geven de lengtes van de zijden namen:



Omdat de zijden van een vierkant gelijke lengten hebben, vinden we zo

$$a + 12 = b$$

$$b + 3 = c$$

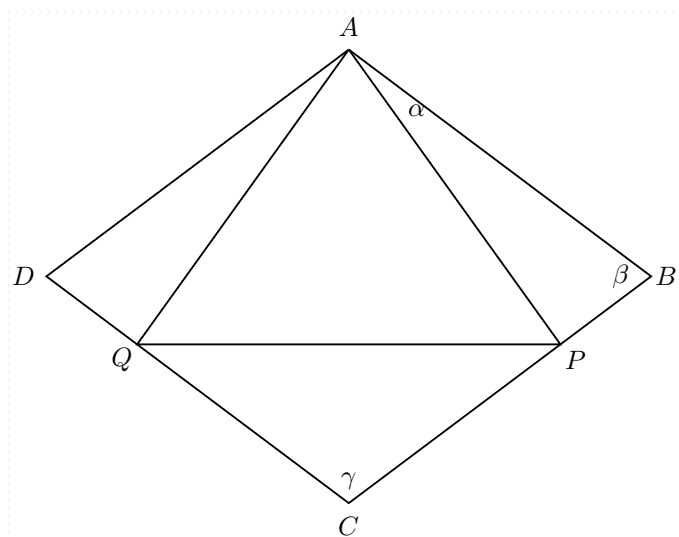
$$c + 12 = d$$

$$d + 3 = 4a$$

Samengevat  $a + 30 = 4a$  en dus  $a = 10$ ,  $b = 22$ ,  $c = 25$ ,  $d = 37$ .

4

We geven de belangrijke punten en hoeken namen:



Omdat  $AB$  en  $AP$  allebei lengte 1 hebben, is driehoek  $PAB$  gelijkbenig, zodat hoek  $APB$  gelijk is aan hoek  $ABP$ , en allebei gelijk zijn aan de helft van  $180 - \alpha$ . Omdat hoek  $QPA$

gelijk is aan  $60^\circ$ , blijft voor hoek  $CPQ$  over  $180^\circ - 60^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 30^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ . Dus hoek  $QCP$  bedraagt  $180 - 2(30^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = 120^\circ - \alpha$ . Anderzijds is die hoek gelijk aan hoek  $BAD$  dus  $60^\circ + 2\alpha$ . Dus  $3\alpha = 60^\circ$ , en de gevraagde hoek bedraagt  $100^\circ$ .

5

De 9 liter zijn er 4 meer dan de 5 liter die zand en water innamen toen de ruimte tussen de korrels geheel gevuld was. Blijkbaar kan 5 liter zand maximaal 3 liter water opnemen zonder dat het totaal volume toeneemt. Dus kan 8 liter zand  $\frac{8}{5} \cdot 3 = 4,8$  liter water opnemen. De resterende 2,2 liter water doet het totaal volume van 8 liter met nog 2,2 liter toenemen.

6

We geven namen aan de 25 velden:

$a5$	$b5$	$c5$	$d5$	$e5$
$a4$	$b4$	$c4$	$d4$	$e4$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$	$e3$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$	$e2$
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$	$e1$

We gebruiken bij het oplossen twee principes:

- Stel dat voor een zeker veld geldt dat al vier verschillende getallen zijn ingevuld in de rij of kolom van dat veld. Dan kunnen we het ontbrekende getal in dat veld invullen.
- Het tweede principe zien we het beste in een voorbeeld:  
De twee getallen die in  $a4$  en  $b4$  staan vullen de drie getallen die in  $c4$ ,  $d4$  en  $e4$  staan tot de vijf getallen 1, 2, 3, 4, 5. Maar de twee getallen die in  $d3$  en  $d5$  staan doen dat ook. Dus de twee getallen in  $d3$  en  $d5$  staan vallen samen met de twee getallen die in  $a4$  en  $b4$  staan – in dezelfde of omgekeerde volgorde. Evenzo:

- De getallen in  $d4$  en  $e4$  zijn die in  $b3$  en  $b5$ .
- De getallen in  $a2$  en  $b2$  zijn die in  $d1$  en  $d3$ .
- De getallen in  $d2$  en  $e2$  zijn die in  $b1$  en  $b3$ .
- De getallen in  $b1$  en  $b2$  zijn die in  $a4$  en  $c4$ .
- De getallen in  $b4$  en  $b5$  zijn die in  $a2$  en  $c2$ .
- De getallen in  $d1$  en  $d2$  zijn die in  $c4$  en  $e4$ .
- De getallen in  $d4$  en  $d5$  zijn die in  $c2$  en  $e2$ .

We passen dit principe alleen toe in een situatie waar één van de twee mogelijkheden is uitgesloten omdat dat twee gelijke getallen in een rij of in een kolom zou opleveren.

We kunnen nu achtereenvolgens invullen:

1. Het tweede principe levert een 1 op plek  $b4$  en een 5 op plek  $d5$ .
2. Het tweede principe levert vervolgens een 2 op plek  $d4$  en een 5 op plek  $e2$ .
3. Het eerste principe levert nu een 4 op plek  $c4$  en op plek  $d1$ , en een 1 op plek  $c5$ .
4. Het eerste principe levert nu een 3 op plek  $d2$  en op plek  $e4$ , en een 5 op plek  $c3$ .
5. Het eerste principe levert nu een 2 op plek  $e3$ , en een 4 op plek  $b2$ .
6. Het eerste principe levert nu een 1 op plek  $e1$ , en een 3 op plek  $b3$ .
7. Het eerste principe levert nu een 2 op plek  $a1$ , en daarmee ligt de onderste rij vast: op plek  $b1$  moet een 5 staan.

De onderste rij wordt dus 2, 5, 3, 4, 1. De rest is ook gemakkelijk in te vullen volgens het eerste principe. Merk op dat we alleen de tweede en vierde ‘plus’ hebben gebruikt.

7

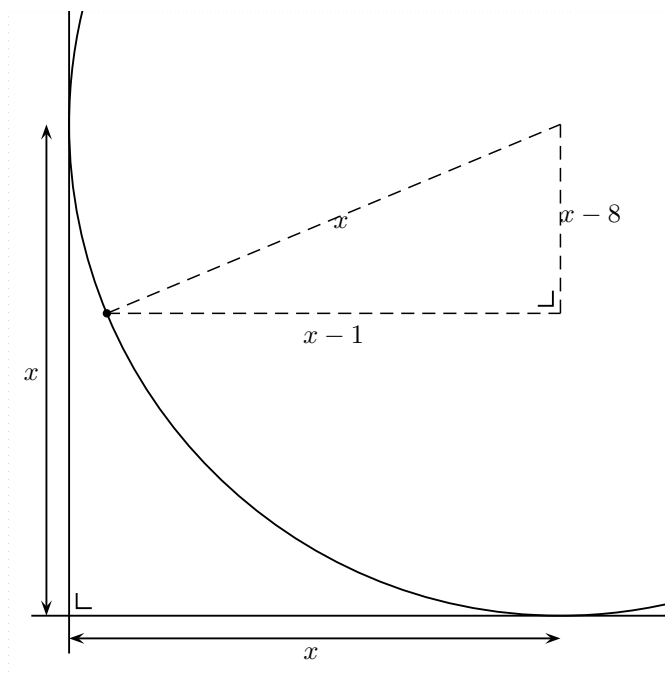
Er zijn drie gevallen wat betreft de eerste keuze:

1. Je kiest de enveloppe met 10 euro. In dat geval verwijdert de quizmaster de enveloppe met 100 euro en blijft de enveloppe met 50 euro over.
2. Je kiest de enveloppe met 50 euro. In dat geval verwijdert de quizmaster de enveloppe met 100 euro en blijft de enveloppe met 10 euro over.
3. Je kiest de enveloppe met 100 euro. In dat geval verwijdert de quizmaster de enveloppe met 50 euro en blijft de enveloppe met 10 euro over.

De deelnemers die bij hun eerste keus blijven winnen gemiddeld  $\frac{10+50+100}{3}$  euro. De deelnemers die hun keus veranderen winnen gemiddeld  $\frac{50+10+10}{3}$  euro. De eerste strategie is gemiddeld  $\frac{100-10}{3} = 30$  euro voordeliger.

8

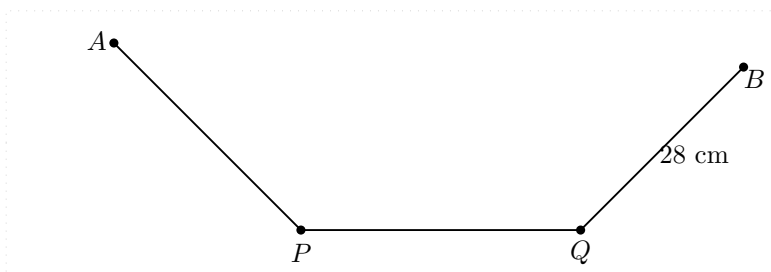
Schrijf  $x$  voor de onbekende straal. Er ontstaat dan een rechthoekige driehoek waarvan de hypotenusa lengte  $x$  heeft en de andere zijden lengtes  $x - 8$  en  $x - 1$ .



Volgens Pythagoras geldt dan  $x^2 = (x - 8)^2 + (x - 1)^2$ . Dit leidt tot de vergelijking  $x^2 - 18x + 65 = 0$  met als oplossingen  $x = 5$  en  $x = 13$ . Omdat de lengte  $x - 8$  positief moet zijn is alleen de tweede oplossing zinvol.

9

Noem het onbekende knakpunt  $P$  en het gegeven knakpunt  $Q$ .



Om uit drie lijnstukken  $AP$ ,  $PQ$  en  $QB$  een driehoek te kunnen maken is het nodig en ook voldoende dat de lengte van elk lijnstuk echt kleiner is dan de som van de lengtes van beide andere lijnstukken, dus

$$AP < PQ + QB$$

$$PQ < AP + QB$$

$$QB < AP + PQ$$

Aan de laatste voorwaarde  $28 < 72$  is zeker voldaan. De eerste twee kunnen we herschrijven als:

$$AP < (72 - AP) + 28$$

$$72 - AP < AP + 28$$

Anders gezegd  $22 < AP < 50$ . De kleinste waarde is dus 23 en de grootste 49.

**10**

Als  $G$  een (groot) getal is dan

$$\begin{aligned} (G+4)(G-1)(G-3) - (G-4)(G+1)(G+3) &= \\ = ((G+4)(G^2 - 4G + 3)) - ((G-4)(G^2 + 4G + 3)) &= \\ = (G^3 - 13G + 12) - (G^3 - 13G - 12) &= 24 \end{aligned}$$

In het bijzonder geldt dat voor  $G = 999995$ .

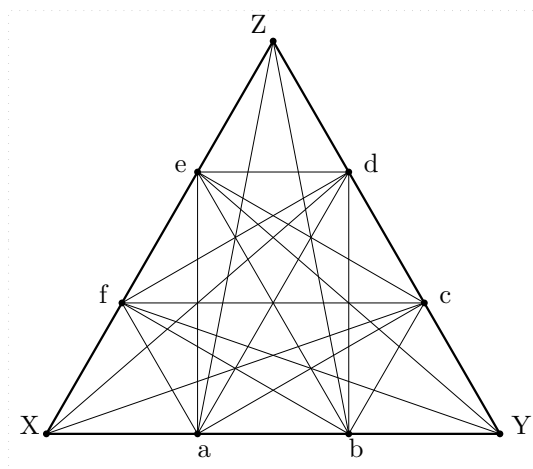
Met iets meer rekenwerk: Als  $M$  een (groot) getal is dan

$$\begin{aligned} (M-1)(M-6)(M-8) - (M-9)(M-4)(M-2) &= \\ = ((M-1)(M^2 - 14M + 48)) - ((M-9)(M^2 - 6M + 8)) &= \\ = (M^3 - 15M^2 + 62M - 48) - (M^3 - 15M^2 + 62M - 72) &= 24 \end{aligned}$$

In het bijzonder geldt dat voor  $M = 1000000$ .

**11**

We geven even namen aan de punten:



Het is niet moeilijk de coördinaten van de benodigde punten op te schrijven:

$$\begin{aligned} X &= (0, 0), & Y &= (6, 0), & Z &= (3, 3\sqrt{3}) \\ a &= (2, 0), & b &= (4, 0), & c &= (5, \sqrt{3}), \\ d &= (4, 2\sqrt{3}), & e &= (2, 2\sqrt{3}), & f &= (1, \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Maar ook zonder dat is het met Pythagoras gemakkelijk uit te rekenen dat de lengte van  $Xc$  gelijk is aan  $\sqrt{5^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 3} = 2\sqrt{7}$ . Ook  $Xd$ ,  $Ye$ ,  $Yf$ ,  $Za$  en  $Zb$  hebben deze lengte.

De overige lengtes zijn ook door gelijkvormigheid te bepalen.

- De lengte van  $ad$  is tweederde van de lengte van  $XZ$  en dus gelijk aan 4. Ook  $be$  en  $cf$  hebben deze lengte.
- De lengte van  $af$  is eenderde van de lengte van  $XZ$  en dus gelijk aan 2. Ook  $bc$  en  $de$  hebben deze lengte.
- De lengte van  $ae$  is tweederde van de hoogte en dus gelijk aan  $2\sqrt{3}$ . Ook  $bd$ ,  $ac$ ,  $df$ ,  $ce$  en  $bf$  hebben deze lengte.

De totale lengte is dus  $6 \cdot 2\sqrt{7} + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2\sqrt{3} = 18 + 12\sqrt{3} + 12\sqrt{7}$ .

12

We gebruiken een coördinatenstelsel met als oorsprong de als eerste beschreven stip en als eenheid 1 cm. We tellen eerst de stippen in het trapeziumgedeelte:

- We vinden 5 stippen op *even* hoogtes  $h$  waarvoor geldt  $0 \leq h \leq 20$ . Voor  $h = 20$  komt het middelpunt van een stip precies op de rand en is hij dus voor de helft zichtbaar. Dat zijn 11 hoogtes.
- We vinden 3 stippen op *even* hoogtes  $h$  met  $20 < h \leq 60$  en  $h \leq 50$ : voor  $h = 60$  zouden er weer stippen op de rand komen, maar voor  $h = 50$  zijn we al bij de boord. Dat zijn 15 hoogtes.

Dit zijn al  $11 \times 5 + 15 \times 3 = 100$  stippen. Tenslotte bevinden zich in het driehoekige gedeelte nog  $3 + 1 = 4$  stippen.

13

Stel dat er  $m$  mensen zijn die korting ontvangen, en dat die elk  $p$  eurocenten moeten betalen. Zowel  $m$  als  $p$  zijn gehele getallen en niet negatief. Nu is

$$mp + (21 - m)(p + 500) = 10400$$

We hebben dus

$$21p = 500m - 100$$

Dat betekent dat 21 een deler is van  $500m - 100 = 100(5m - 1)$ , dus van  $5m - 1$ . Dus is 21 ook een deler van  $21m - 4(5m - 1) = m + 4$ . Maar omdat  $0 \leq m \leq 21$  kan dat alleen als  $m = 17$ .

14

Het gegeven betekent dat

$$2 \cdot (100a + 10b + c) - 1 = 100c + 10a + b$$

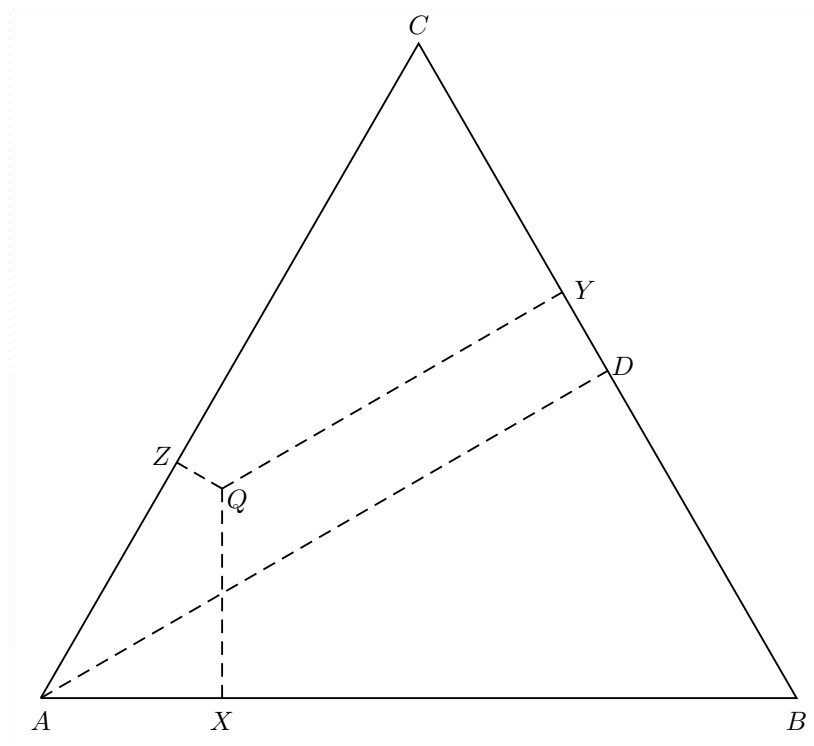
ofwel

$$190a + 19b = 98c + 1$$

Dus 19 is een deler van  $98c + 1$  en dus van  $3c + 1$ . Proberen van  $c = 0, 1, \dots, 9$  laat zien dat dat alleen kan als  $c = 6$ . Dan is  $190a + 19b = 589$  en dus  $10a + b = 31$ . Dus is  $a = 3$  en  $b = 1$ .

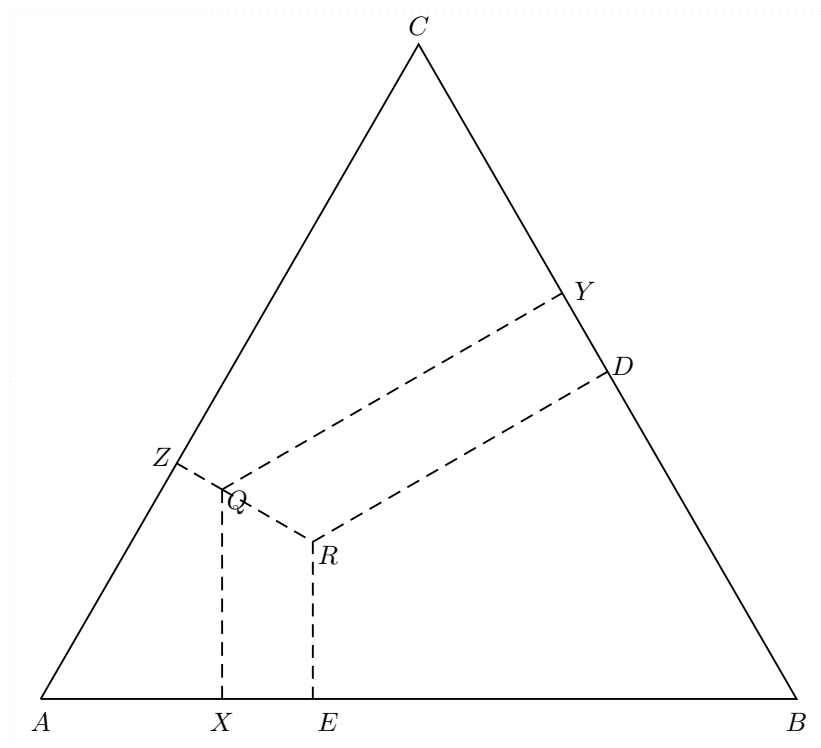
15

We schrijven  $A$ ,  $B$  en  $C$  voor de hoekpunten van de genoemde driehoek, en we schrijven  $P$  en  $Q$  voor de eindpunten van het genoemde lijnstuk. De lengte van een projectie verandert niet wanneer we het lijnstuk parallel verplaatsen. Daardoor kunnen we bereiken dat  $P$  of  $Q$  samenvalt met een van de hoekpunten van de driehoek. Bijvoorbeeld als de richting van  $PQ$  tussen die van  $AB$  en  $AC$  in ligt, dan kunnen we bereiken dat  $P = A$ , en zo zijn er zes gevallen. Door zonnodig de namen van de punten te verwisselen kunnen we bereiken dat het  $P$  is die met  $A$  samenvalt. Laten we de projecties van  $Q$  op de zijden  $AB$ ,  $BC$  en  $CA$  respectievelijk  $X$ ,  $Y$  en  $Z$  noemen. Verder schrijven we  $D$  voor de projectie van  $A$  op  $BC$ . Het gaat dan om de lengtes van  $AX$ ,  $AZ$  en  $DY$  als in onderstaande figuur.



We trekken  $ZQ$  door tot hij  $AD$  snijdt in  $R$ , en verbinden  $R$  met zijn projectie  $E$  op  $AB$ :





Omdat  $R$  op de bissectrice  $AD$  ligt is  $AZ = AE$ . Maar  $AE = AX + XE$ , en  $XE = YD$  omdat  $QR$  met  $AB$  en  $CB$  allebei hoeken van  $30^\circ$  maakt.

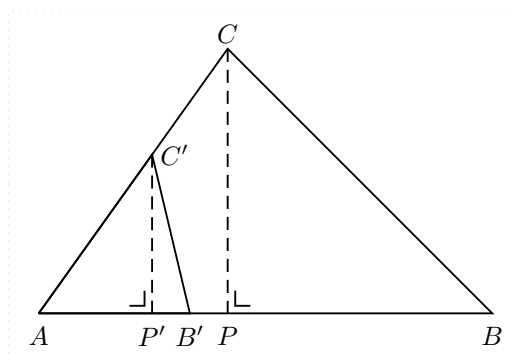
Als  $Q$  aan de andere kant van  $AD$  ligt vinden we evenzo  $AX = AZ + DY$ . In ieder geval is de lengte van een van de projecties de som van de lengtes van de andere twee. In de gegeven situatie is de derde lengte dus  $7 - 4 = 3$  of  $7 + 4 = 11$ .

16

Van de vijfde en zesde mededeling is er één waar en één onwaar. Ook van de zevende en achtste mededeling is er één waar één onwaar. Van de negende en tiende mededeling is er minstens één onwaar. Als er precies één onwaar is dan zijn de onjuiste mededelingen op één na opgebruikt, en is er van de eerste vier mededelingen precies één onwaar. Maar dat is onzin, want als drie personen zich naar waarheid voorgesteld hebben moet de resterende persoon ook de waarheid hebben gesproken. Dus zijn de negende en tiende mededeling allebei onwaar. Dat betekent dat de eerste vier mededelingen allemaal waar zijn.

17

Eerst wat voorbereidend werk. Stel je voor dat twee driehoeken een hoek gemeen hebben, zoals aangegeven in de volgende figuur.

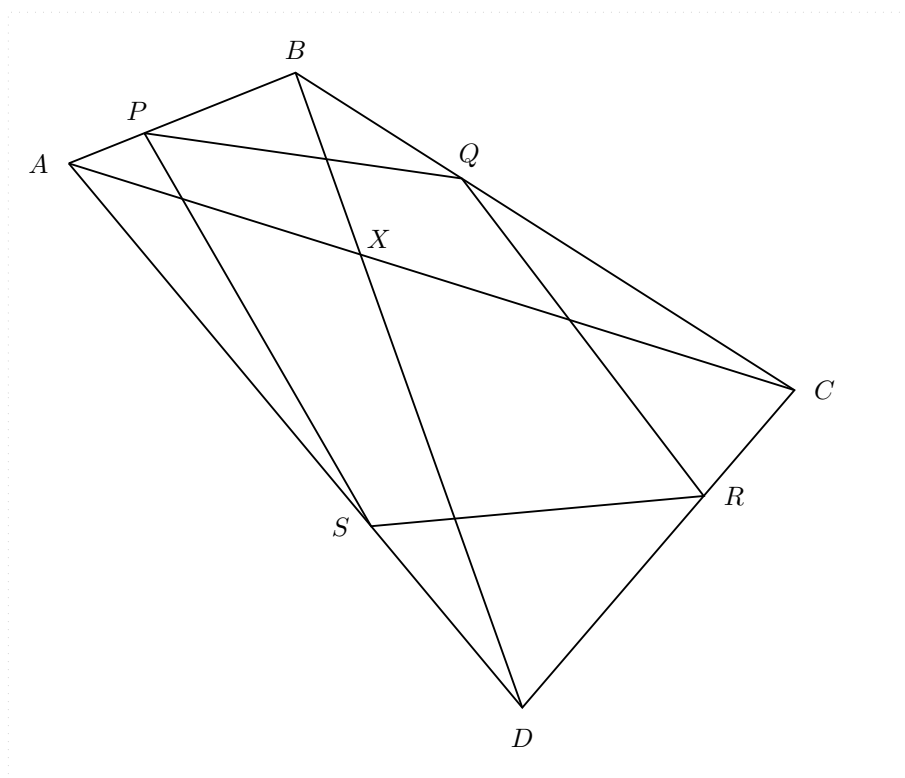


Dan geldt voor de verhouding van de oppervlakten

$$\frac{\text{opp } \triangle ABC}{\text{opp } \triangle AB'C'} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot PC}{\frac{1}{2} \cdot AB' \cdot P'C'} = \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'}$$

De oppervlaktes verhouden zich dus als de producten van de lengtes van de zijden die in die hoek samenkomen.

Nu de eigenlijke opgave. We trekken twee diagonalen, en geven de punten namen:



Volgens de voorbereiding is oppervlakte  $PBQ$  precies  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$  van oppervlakte  $ABC$ . Evenzo is oppervlakte  $SDB$  precies  $\frac{2}{9}$  van oppervlakte  $ADC$ . Oppervlaktes  $PBQ$  en  $SDRB$  samen vormen dus  $\frac{2}{9}$  van de oppervlakte van de gehele vierhoek  $ABCD$ . Evenzo vormen oppervlaktes  $PAS$  en  $QCR$  samen  $\frac{2}{9}$  van de oppervlakte van de gehele vierhoek

$ABCD$ . De oppervlakte van het witte gedeelte is dus  $\frac{4}{9}$  van het geheel. Het geheel telt dus 225 eenheden aan oppervlakte.

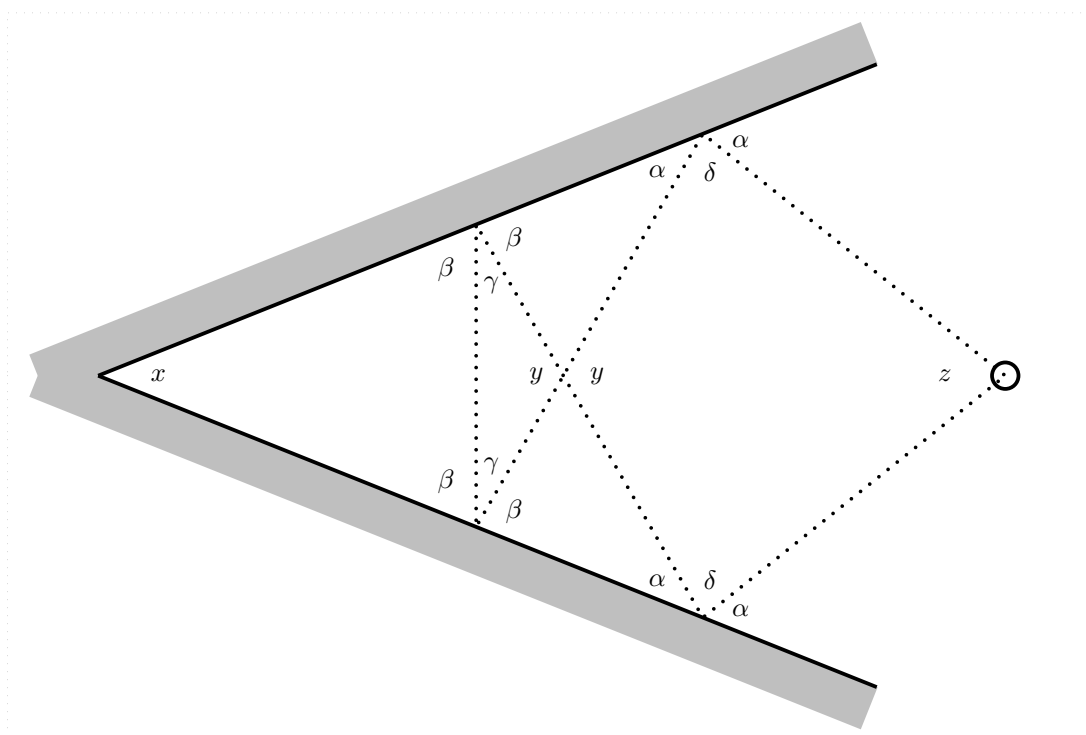
18

1 mei 2000 wordt als ‘31-04’ aangegeven, en 2 mei als ‘01-05’, enzovoorts. In mei 2000 loopt het horloge dus 1 dag achter. Omdat mei 31 dagen heeft is dat in juni 2000 nog steeds het geval. In juli 2000 is het horloge 2 dagen achter geraakt. In augustus en september blijft dat zo, maar in oktober is het horloge 3 dagen achter, in december 4 dagen, en in maart 2001 ineens 7 dagen. Op 30 april 2001 staat het horloge dus 7 dagen achter.

Weer een jaar later is de fout opgelopen tot 14 dagen, het volgende jaar tot 21 dagen, en op 30 april 2004 tot 27 dagen (want 2004 was een schrikkeljaar), en wijst het ‘03-04’ aan. Op 30 april 2052 is de fout al  $13 \times 27 = 351$  dagen, en in maart 2055 is de fout  $351 + 21 = 372 = 12 \times 31$  dagen, zodat (het lijkt alsof) het horloge de correcte datum aangeeft.

19

We geven namen aan nog wat hoeken:



en lezen de volgende gelijkheden af:

$$x + 2\beta = 180^\circ$$

$$\gamma + 2\beta = 180^\circ$$

$$y + 2\gamma = 180^\circ$$

$$y = \alpha + \beta$$

$$\delta + 2\alpha = 180^\circ$$

$$y + 2\delta + z = 360^\circ$$

Het is nu eenvoudig om alle hoeken in  $x$  uit te drukken:

$$\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}x$$

$$\gamma = x$$

$$y = 180^\circ - 2x$$

$$\alpha = y - \beta = 90^\circ - \frac{3}{2}x$$

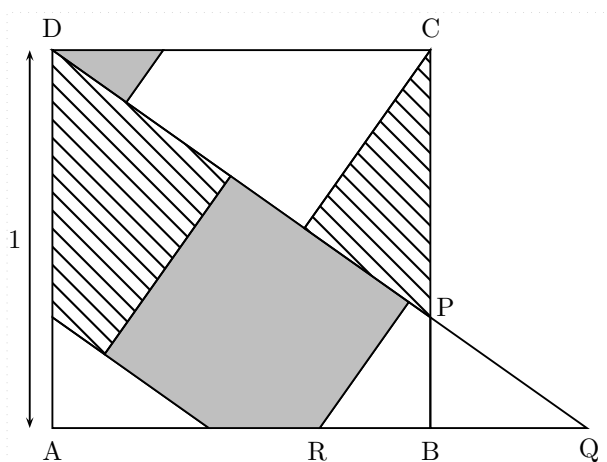
$$\delta = 180^\circ - 2\alpha = 3x$$

$$z = 360^\circ - y - 2\delta = 180^\circ - 4x$$

Dus omdat  $z = 56^\circ$  is  $x = \frac{1}{4}(180^\circ - 56^\circ) = 31^\circ$ .

20

Schuif de witte driehoek linksonder over een afstand 1 naar rechts, zodat hij aansluit bij het onderste stuk van de rechterzijkant van het grote vierkant. We geven even namen aan enige belangrijke punten, zie onderstaande figuur:



Omdat het grote vierkant oppervlakte 1 heeft en uit drie even grote kleine vierkanten bestaat hebben de kleine vierkanten oppervlakte  $\frac{1}{3}$ . Hun zijdes hebben dus lengte  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . In bovenstaande figuur bestaat het lijnstuk  $DQ$  uit de (rechterboven)zijdes van de kleine vierkanten. De lengte van  $DQ$  bedraagt dus  $3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ .

Volgens de stelling van Pythagoras is de lengte van  $AQ$  nu  $\sqrt{2}$ , en de lengte van  $BQ$  dus  $-1 + \sqrt{2}$ . Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken  $\triangle BQP$  en  $\triangle AQD$  volgt echter dat de verhouding van de lengtes van  $BP$  en  $BQ$  gelijk is aan de verhouding van de lengtes van  $AD$  en  $AQ$ . De lengte van  $BP$  is dus  $(-1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ .