

Ausarbeitung Aufgabe 1

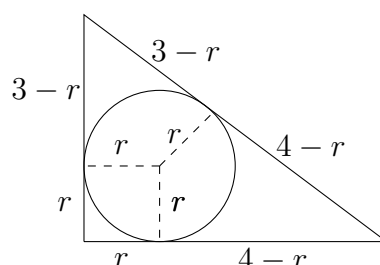
In einem gleichseitigen Dreieck fallen die Berührungspunkte des Inkreises mit den Mittelpunkten der Seiten zusammen. Der Inkreis des großen Dreiecks ist also auch der Umkreis des Dreiecks, das aus den Mittelpunkten der Seite gebildet wird. Das kleine Dreieck aus der Aufgabenstellung ist also kongruent zu diesem Dreieck. Da die Verbindungsstrecken der Mittelpunkten der Seiten ein gleichseitiges Dreieck in vier gleiche Dreiecke aufteilen, ist das Verhältnis der beiden Flächen 4:1.

Ausarbeitung Aufgabe 2

Die einzigen beiden Möglichkeiten, (ohne Beachtung der Reihenfolge) vier Ziffern mit der Summe 14 und dem Produkt 36 zu bilden, sind 1, 1, 6, 6 und 1, 2, 2, 9. Diese Ziffern können in den vierstelligen Dezimalzahlen in beliebiger Reihenfolge vorkommen. Es gibt im ersten Fall $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten und im zweiten Fall $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten der Anordnung. Insgesamt erhalten wir $6 + 12 = 18$ vierstellige Dezimalzahlen mit den geforderten Eigenschaften.

Ausarbeitung Aufgabe 3

Man zeichnet vom Mittelpunkt des Inkreises die Lote mit der Länge des Radius r auf die Dreiecksseiten und erhält an jeder Ecke jeweils zwei kongruente Dreiecke. Es ergibt sich folgendes Bild:



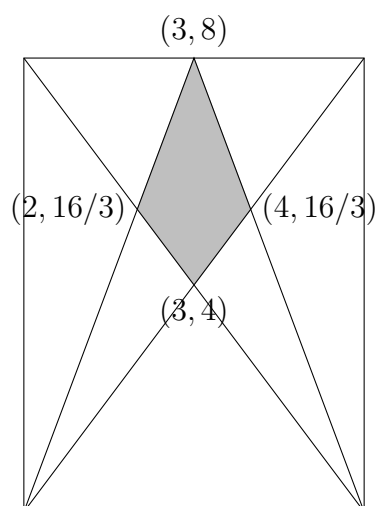
Wir sehen, dass dann $5 = (3 - r) + (4 - r)$ gilt, also $r = 1$. Somit ist die Fläche des Kreises genau π .

Ausarbeitung Aufgabe 4

Im k -ten Schritt schalten wir alle Lampen um, deren Nummern Vielfache von k sind. Am Ende sind nur die Lampen eingeschaltet, die wir ungerade oft umgeschaltet haben, also die Lampen, deren Zahl eine ungerade Anzahl von Teilern (einschließlich 1) hat. Nun ist für jeden Teiler m von n auch $\frac{n}{m}$ ein Teiler von n . Teiler kommen also paarweise vor, es sei denn, es gibt einen Teiler m , für den $\frac{n}{m} = m$, also $n = m^2$ gilt. Daher hat n eine gerade Anzahl von Teilern, wenn n eine Quadratzahl ist, und eine ungerade Anzahl von Teilern, wenn n keine Quadratzahl ist. Es gibt 10 Quadratzahlen zwischen 1 und 100, also sind am Ende 10 Lampen eingeschaltet.

Ausarbeitung Aufgabe 5

Die linke untere Ecke soll den Ursprung darstellen. Wir können dann nach einfachen Überlegungen und Rechnungen einige Koordinaten auf der Figur hinzufügen:



Die Fläche ist also $2 \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} = 4$.

Ausarbeitung Aufgabe 6

Das Hinzufügen einer 3 am Ende entspricht der Multiplikation mit 10 (also 3) und der anschließenden Addition von 3. Daraus erhält man sukzessive:

$$\begin{aligned} 3 &\equiv 3 \pmod{7} \\ 33 &\equiv 5 \pmod{7} \\ 333 &\equiv 4 \pmod{7} \\ 3333 &\equiv 1 \pmod{7} \\ 33333 &\equiv 6 \pmod{7} \\ 333333 &\equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

Wir erhalten einen Zykel der Länge sechs, und da $2024 \equiv 2 \pmod{6}$ ist, ergibt sich:

$$\underbrace{333 \cdots 333}_{2024 \text{ mal}} \equiv 5 \pmod{7}.$$

Ausarbeitung Aufgabe 7

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich:

$$R = \sqrt{2} \cdot r + r = (1 + \sqrt{2}) \cdot r,$$

wobei r der Radius des kleineren Kreises ist. Die Bedingung besagt:

$$\pi \cdot R^2 = \pi \cdot r^2 + \pi \quad \text{oder} \quad R^2 = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right)^2 \cdot R^2 + 1.$$

Dies führt zu

$$1 = \left(1 - \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right)^2 \right) \cdot R^2 = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \cdot R^2.$$

Wenn man den Nenner rational macht, erhält man:

$$\frac{1}{2} = \frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot (3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8} \cdot R^2 = (3 - 4 + \sqrt{2}) \cdot R^2.$$

Daraus folgt:

$$R^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)$$

und schließlich:

$$R = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}.$$

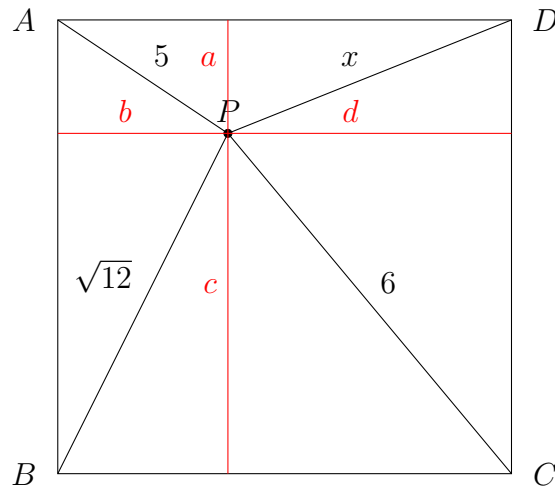
Ausarbeitung Aufgabe 8

Offensichtlich ist die Zahl

$$0.\overline{987654} = \frac{987654}{999999} = \frac{329218}{333333}.$$

Ausarbeitung Aufgabe 9

Wenn wir eine vertikale und eine horizontale Linie einzeichnen und dann den Satz des Pythagoras anwenden, erhalten wir:



$$\begin{aligned}
 x^2 &= a^2 + d^2 \\
 &= 5^2 - b^2 + d^2 \\
 &= 5^2 - (12 - c^2) + d^2 \\
 &= 5^2 - 12 + c^2 + d^2 \\
 &= 5^2 - 12 + 6^2 = 49
 \end{aligned}$$

Ausarbeitung Aufgabe 10

Wir bezeichnen die Zahl von Tess mit t und die Zahl von Claudia mit c . Nach der ersten Aussage von Claudia weiß Tess, dass c gerade ist. Wäre c nämlich ungerade, hätte Claudia gewusst, dass ihre Zahl nicht das Doppelte von Tess' Zahl sein kann. Daher gilt:

$$c \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}.$$

In ähnlicher Weise weiß Claudia nach der nächsten Aussage von Tess, dass Tess' Zahl das Doppelte von einer der oben genannten Möglichkeiten für c sein muss. Andernfalls hätte Tess gewusst, dass ihre Zahl nicht doppelt so groß sein kann wie Claudias Zahl. Daher gilt:

$$t \in \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}.$$

Nach der nächsten Aussage von Claudia weiß Tess, dass Claudias Zahl die Hälfte von einer der oben genannten Möglichkeiten für t sein muss. Sonst hätte Claudia gesagt, dass ihre Zahl nicht die Hälfte von Tess' Zahl ist. Deshalb gilt:

$$c \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}.$$

In ähnlicher Weise weiß Claudia nach der letzten Aussage von Tess, dass Tess' Zahl die Hälfte einer der oben genannten Möglichkeiten für c sein muss. Die einzige Zahl in der obigen Liste der Möglichkeiten für t , die diese Eigenschaft hat, ist $t = 4$.

Ausarbeitung Aufgabe 11

Wir bezeichnen die Länge der n -ten blauen Diagonalen mit d_n . Nach dem Satz von Pythagoras hat die erste blaue Diagonale die Länge $d_1 = \sqrt{2}$. Diese blaue Seite wird zu einer Seite eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse d_2 und der anderen Seite 1. Folglich ist

$$d_2^2 = d_1^2 + 1^2 = 3.$$

Die Wiederholung dieser Konstruktion ergibt:

$$d_n^2 = d_{n-1}^2 + 1 = n + 1,$$

also:

$$d_{899} = \sqrt{900} = 30.$$

Ausarbeitung Aufgabe 12

Die entstehenden Kosten sind:

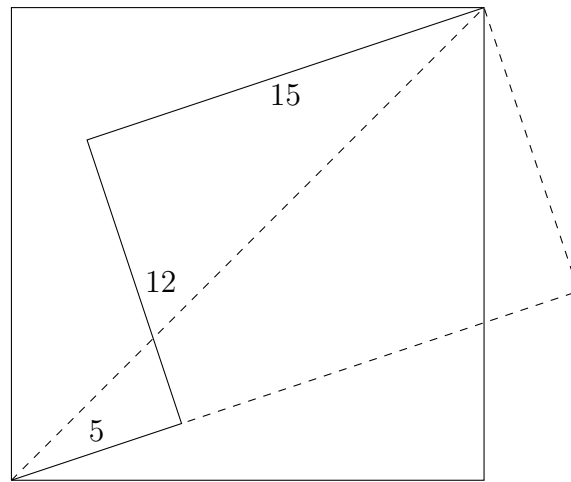
$$\begin{aligned} 0 \rightarrow 1 &= 0, & 1 \rightarrow 2 &= 4 \\ 2 \rightarrow 3 &= 1, & 3 \rightarrow 4 &= 1 \\ 4 \rightarrow 5 &= 2, & 5 \rightarrow 6 &= 1 \\ 6 \rightarrow 7 &= 1, & 7 \rightarrow 8 &= 4 \\ 8 \rightarrow 9 &= 0, & 9 \rightarrow 0 &= 1 \\ 5 \rightarrow 0 &= 2 \end{aligned}$$

Wir müssen 6 mal die Schritte $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \cdots \rightarrow 9 \rightarrow 0$ an der ganz rechten Stelle der Digitalanzeige durchführen. Auf diese Weise entstehen Kosten von $6 \cdot 15 = 90$ Cent. An der mittleren Stelle der Digitalanzeige müssen wir die Schritte $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \cdots \rightarrow 5 \rightarrow 0$ durchführen, hier entstehen Kosten von 10 Cent. Dann erfolgt noch die Umschaltung $7 \rightarrow 8$, die 4 Cent kostet.

Es entstehen somit Gesamtkosten von $90 + 10 + 4 = 104$ Cent.

Ausarbeitung Aufgabe 13

Wir fügen einige Strecken hinzu:



Es sei d die Länge der Diagonale und z die Seite des Quadrats. Nach dem Satz von Pythagoras haben wir:

$$d^2 = (5 + 15)^2 + 12^2 = 544,$$

$$z^2 + z^2 = d^2.$$

Die Kombination beider Ergebnisse ergibt:

$$z^2 = 544/2 = 272.$$

Ausarbeitung Aufgabe 14

Die Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle ABC$ haben drei gleiche Winkel und sind daher ähnlich. Dies führt zu:

$$\frac{a}{1} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

and nach Quadrieren zu:

$$\frac{a^2}{1} = \frac{1+a^2}{a^2}.$$

Dies ist die Gleichung für den Goldenen Schnitt, und wir erhalten: $a^2 = \varphi$, und damit:

$$a = \sqrt{\varphi} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ausarbeitung Aufgabe 15

Jede der 25 von Bob befragten Personen kann eine Antwort zwischen 0 und 24 geben (da niemand seinem*r Partner*in die Hand gibt). Da jede*r Teilnehmer*in eine andere Antwort gegeben hat, bedeutet dies, dass jede der Zahlen 0 bis 24 auch tatsächlich als Antwort gegeben wurde. Man beachte, dass die Person, die 24 geantwortet hat, allen die

Hand geschüttelt hat außer die*dem eigenen Partner*in und daher zwangsläufig die*der Partner*in derjenigen Person sein muss, die 0 geantwortet hat. Ebenso kann man folgern: Die Person, die 23 gesagt hat, hat allen die Hand geschüttelt außer die*dem eigenen Partner*in und der Person, die niemandem die Hand gegeben hat. Die Person, die 1 gesagt hat, hat aber auf jeden Fall derjenigen Person die Hand geschüttelt, die 24 gesagt hat, kann also keiner anderen Person die Hand gegeben haben. Also muss die Person, die 1 gesagt hat, in jedem Fall die*der Partner*in der Person sein, die 23 gesagt hat. So geht es induktiv immer weiter: Die Person, die k gesagt hat, muss die*der Partner*in der Person sein, die $24 - k$ gesagt hat. Das bedeutet, dass die beiden Personen, die 12 Personen die Hand geschüttelt haben, ein Paar sein müssen. Gleichzeitig können sie kein Paar sein, das Bob gefragt hat, weil jede Person eine andere Antwort gegeben hat. Somit müssen An und Bob dieses Paar sein und An hat 12 Personen die Hand geschüttelt.

Ausarbeitung Aufgabe 16

Alle drei Dreiecke sind zueinander ähnlich. Daher ist das Dreieck in der linken unteren Ecke viermal kleiner als das Dreieck auf der rechten Seite. Wenn wir also die kleinere Kathete des linken Dreiecks b und die größere Kathete a nennen, dann erhalten wir: $a + 4b = 13 + b$, also $a + 3b = 13$ und $a + 4b = 4a$. Daraus folgt, dass $a = 4$ und $b = 3$. Mit dem Satz des Pythagoras ist die Länge der kleinen Quadrate gleich 5 und die blaue Fläche daher gleich $4 \cdot 5^2 = 100$.

Ausarbeitung Aufgabe 17

Bei zwei oder mehr Würfeln haben wir zwei äußere Würfel, bei denen jeweils die Unterseite und die an den benachbarten Würfel angrenzende Seite verdeckt sind, und $n - 2$ innere Würfel. Für jeden der beiden äußeren Würfel sind im Maximalfall die Eins und die Zwei und im Minimalfall die Sechs und die Fünf nicht sichtbar. Bei den inneren Würfeln sind die untere Seite (im Maximalfall die Eins und im Minimalfall die Sechs) und auch die beiden Seiten, die an die benachbarten Würfel angrenzen, verdeckt. Da sich diese beiden Seiten auf den Würfeln gegenüberliegen, ist ihre Summe immer 7. Die Differenz zwischen der größtmöglichen und der kleinstmöglichen Augensumme für n Würfel ist also:

$$\begin{aligned} d(n) &= A(n) - a(n) \\ &= \{n \cdot 21 - [2 \cdot (1 + 2) + (n - 2) \cdot 1 + (n - 2) \cdot 7]\} \\ &\quad - \{n \cdot 21 - [2 \cdot (5 + 6) + (n - 2) \cdot 6 + (n - 2) \cdot 7]\} \\ &= 16 + (n - 2) \cdot 5. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$d(2024) = 16 + 2022 \cdot 5 = 10126.$$

Ausarbeitung Aufgabe 18

Zunächst lösen wir die Aufgaben mit direkten und einfachen Rechnungen:

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &&= 2, \\ |AD| &= \sqrt{u^2 + v^2} &&= \frac{5}{3}, \\ |CD| &= \sqrt{(x-u)^2 + (v-y)^2} &&= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Nach Quadrieren, Ausmultiplizieren und Umordnen erhält man:

$$x^2 - 2x + y^2 = 3, \tag{1}$$

$$u^2 + v^2 = \frac{25}{9}, \tag{2}$$

$$x^2 - 2xu + u^2 + v^2 - 2yv + y^2 = \frac{25}{9}. \tag{3}$$

Addition von (1) zu (2) führt zu:

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - 2x = \frac{52}{9}. \tag{4}$$

Nun subtrahieren wir (3) von (4) und erhalten:

$$-2x + 2xu + 2yv = \frac{27}{9} = 3$$

und daher:

$$xu - x + vy = \frac{3}{2}.$$

Nun lösen wir die Aufgabe etwas reflektierter:

Wenn wir davon ausgehen, dass die Frage sinnvoll ist, hängt der Wert $xu - x - yv$ nicht von den Winkeln des Vierecks ab, so dass man die Seiten verschieben kann, ohne ihre Längen zu verändern. Man kann zum Beispiel C um B drehen, bis C auf der x -Achse liegt. (D wird ebenfalls verschoben.) Dann haben wir

$$C = (x, y) = (3, 0).$$

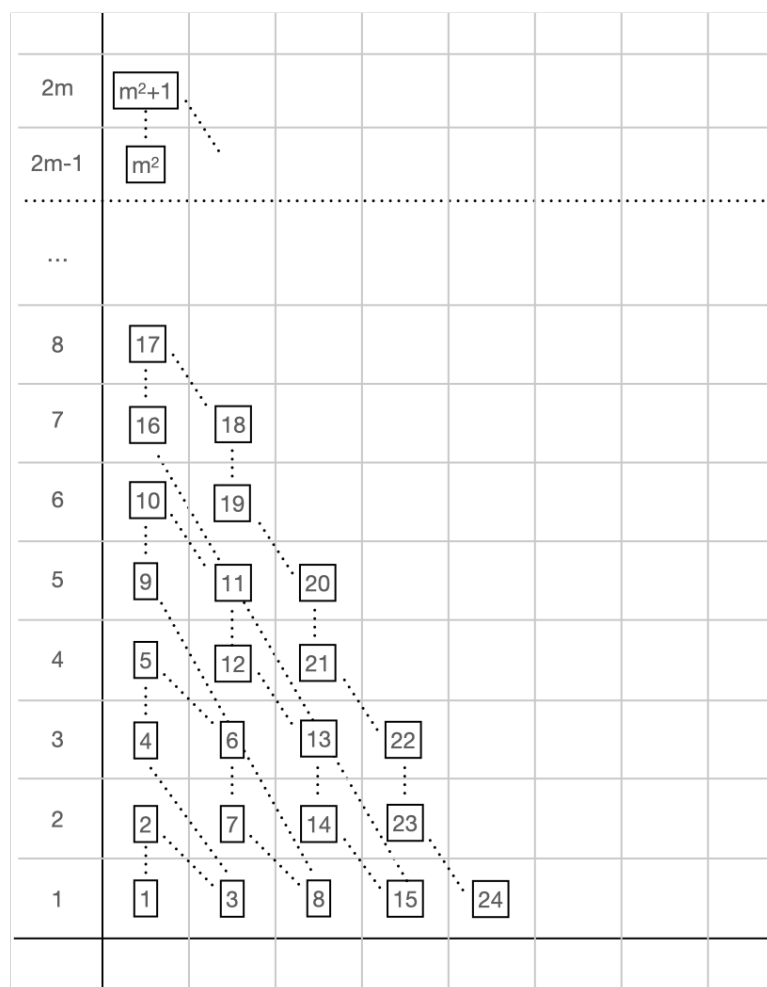
Es bleibt ein gleichschenkliges Dreieck ACD übrig. Es ist also klar, dass

$$D = (u, v) = \left(\frac{3}{2}, v\right)$$

und

$$xu - x + vy = 3 \cdot \frac{3}{2} - 3 + 0 = \frac{3}{2}.$$

Ausarbeitung Aufgabe 19



Alle Personen, die als Numer eine Quadratzahl haben, gehen in eine neue Etage und auch die Personen mit der auf eine Quadratzahl folgenden Zahl gehen in eine neue Etage (siehe Bild), was durch Induktion bewiesen werden kann. Danach gibt es einen Zyklus, bei dem in jedem Stockwerk absteigend jemand hinzukommt (siehe Bild). Die erste Person im Stockwerk 20 hat die Nummer $n_{20} = 101 = 10^2 + 1$ und nun brauchen wir 23 weitere Zyklen, um die Zimmernummer 24 zu füllen. Die Person mit der Zimmernummer 24 in der Etage mit der Nummer $v = 20$ stammt also aus dem Zyklus mit $n_{66} = 33^2 + 1$. Da es die $(66 - 20)te = 46te$ Person in diesem Zyklus ist, ergibt sich $n = 33^2 + 47 = 1136$.

Ausarbeitung Aufgabe 20

Wir beginnen mit einigen intuitiven Überlegungen: Erstens ergibt es für Vincent keinen Sinn, Waffeln an zwei verschiedenen Orten zu hinterlassen, wenn er genau so gut an einem Ort eine größere Menge hinterlassen kann. Wenn also zum Beispiel Vincent 20 Waffeln an der 20-km-Marke und 40 Waffeln an der 40-km-Marke lässt und dann zurückläuft, ist es für ihn besser, direkt 60 Waffeln an der 40-km-Marke zu hinterlassen. Eine zweite Beobachtung ist, dass es besser ist ein Vielfaches von hundert Waffeln an einer bestimmten Markierung zu hinterlassen. Wenn er zum Beispiel 120 Waffeln an einem Ort zurücklässt, an dem nur 100 in seine Tasche passen, würde er 20 Waffeln für eine unnötige zusätzliche

Reise verschwenden.

Es sei nun x der erste Ort, zu dem Vincent reist, und er lasse dort y Waffeln zurück. Die zu maximierende Definitionsgleichung lautet dann:

$$(x + y + x) + (x + y + x) + 100 = 300$$

(wobei die Klammern eine Reise zum Punkt x und zurück angeben). Wir streben an, dass $y + y + 100 - x$ ein Vielfaches von 100 ist und dass $x + y + x = 100$ gilt. Die Lösung lautet also: $x = 20$ und $y = 60$ (oder $x = 40$ und $y = 20$). Vincent sollte also 20 km zurücklegen, 60 Waffeln abgeben und zurückkehren. Wenn er dies zweimal tut und dann die letzte Ladung Waffeln zur 20-km-Marke trägt, lagern 200 Waffeln dort. Ähnliche Gleichungen ergeben, dass er weitere $33 + \frac{1}{3}$ km zurücklegen sollte, um 100 Waffeln an der $53 + \frac{1}{3}$ km-Marke zu lagern. Wenn er diese Waffeln den ganzen Weg bis zu Thomas mitnimmt, bleiben am Ende 53 vollständige Waffeln übrig.

Wir beweisen nun rigoros, dass diese Strategie optimal ist: Jede Strategie, falls sie existiert, würde aus endlich vielen Schritten bestehen (wobei ein Schritt hier als die Aktion definiert ist, Waffeln von Punkt A nach Punkt B zu bringen). Wir ignorieren nicht-ganzzahlige Lösungen. Wir können eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Strategien definieren, indem wir zwei Strategien für äquivalent erklären, wenn sie mit der gleichen Anzahl von erhaltenen Waffeln enden. Nun wählen wir aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten, und lassen S das maximale Element unter den Repräsentanten sein (wir ignorieren also äquivalent gute Strategien). Dieses S besteht aus Schritten s_1, s_2, \dots, s_N . Dabei sei s_N der letzte Schritt, bei dem eine bestimmte Menge von Waffeln $W \leq 100$ von einem Punkt Y zur Ziellinie bewegt wird. Es gibt keine Strategie, bei der die Tüte mehr als W Waffeln am Punkt Y fassen kann, da S optimal ist. Wenn es nämlich eine bessere Strategie Q gäbe, die mehr als W Waffeln an Y liefert, dann ergibt die kombinierte Strategie von Q und dann s_N eine bessere Strategie als S , was ein Widerspruch ist. Wenn eine andere Strategie W Waffeln von einem Punkt $Z < Y$ wegbewegt hätte, wäre sie ebenfalls nicht optimal. Betrachtet man also ein umformuliertes Problem mit Y als Ziellinie und 300 Ausgangs-Waffeln, so ergibt sich, dass die beste Strategie W Waffeln an dem Punkt Y liefern sollte, wobei Y so groß wie möglich sein sollte. Daher kann keine Strategie, die weniger als 100 Waffeln bei Y liefert, besser sein, wenn es eine Strategie gibt, die 100 Waffeln bei Y liefert, wobei Y maximiert ist. Wenn wir also eine Strategie aufzeigen, die 100 Waffeln vor dem ultimativen Weg liefert, wobei die Entfernung $100 - Y$ minimiert wird, muss sie der besten Strategie entsprechen. Die Rückwärtsinduktion beweist, dass die Schritte immer Taschen mit 100 Waffeln verwenden und die restliche Entfernung minimieren müssen. Da die vorgeschlagene Lösung dies tut, muss sie mit der optimalen Strategie S äquivalent sein. (Tatsächlich beweist dieser Beweis allgemeiner, dass für jede anfängliche Waffelanzahl und jede Entfernung die beste Strategie darin besteht, so zu arbeiten, dass jedes Mal, wenn man eine Tüte Waffeln zwischen zwei Punkten bewegt, man 100 Waffeln in der Tüte haben muss, die man bewegt, und die endgültige Entfernung zu minimieren).