
WISKUNDE-ESTAFETTE KUN 2003

Uitwerkingen

1

Stel dat de Houyhnhnm 13 sokken uit de la neemt. Als daar niet 4 gelijk gekleurde bij zouden zijn dan zouden er hoogstens 3 van elke kleur genomen zijn, tot een totaal van 12, in tegenspraak met de aanname. Dus zijn er wel 4 gelijk gekleurde bij. Dat betekent dat het aantal van 13 zekerheid biedt.

Stel dat de Houyhnhnm 12 sokken uit de la neemt. Dan is het mogelijk dat er van elke kleur 3 genomen zijn. Het aantal van 12 biedt dus geen zekerheid. Daarom is 13 het *kleinste* aantal dat zekerheid biedt.

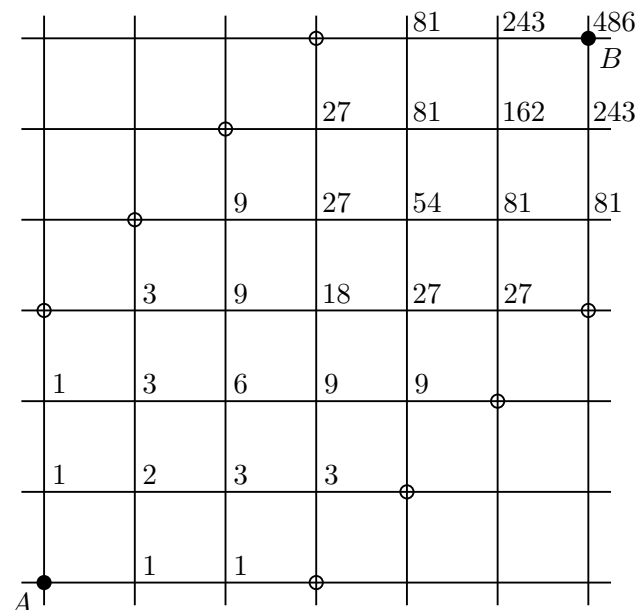
2

We schrijven bij elk kruispunt K het aantal routes zonder omwegen van A naar K . Dit aantal is gelijk aan de som van het aantal routes waarvan het laatste stuk naar het oosten loopt, en het aantal routes waarvan het laatste stuk naar het noorden loopt. Het aantal is dus gelijk aan de som van het aantal routes naar het kruispunt onmiddellijk westelijk van K , en het aantal routes naar het kruispunt onmiddellijk zuidelijk van K .

Daarbij moet het aantal routes naar zo'n voorgaand kruispunt als nul worden gelezen als

- dat kruispunt geblokkeerd is (aangegeven door een kringetje) of
- dat kruispunt zuidelijker of westelijker dan A ligt

Dat leidt tot het volgende diagram



Het antwoord is dus 486.

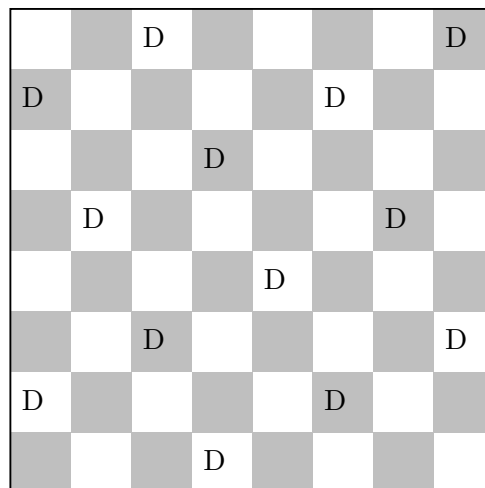
Er valt nog op te merken dat de getallen langs de diagonaal van A naar B een eenvoudig patroon volgen: die getallen zijn van de vorm 2×3^n .

3

Zij gegeven een willekeurig veld van het schaakbord. Dan kunnen we het volgende doen:

- Eerst markeren we dat veld zelf.
- Vervolgens markeren we de velden die vanaf dat gegeven veld in één paardsprong te bereiken zijn.
- Vervolgens markeren we de ongemarkeerde velden die vanaf reeds gemarkeerde velden in één sprong te bereiken zijn.
- Enzovoorts.

Zo gaan we door totdat er geen ongemarkeerd veld meer vanuit een gemarkeerd veld in één sprong te bereiken is. Omdat er maar 64 velden zijn, stopt dit proces na hoogstens 64 stappen. De volgende figuur geeft het resultaat van dit proces als we starten vanuit veld $e4$.



Merk op dat als we starten vanuit een andere van de nu gemarkeerde velden, we met hetzelfde plaatje eindigen. Dit komt omdat de omgekeerde van een toegelaten sprong ook een toegelaten sprong is.

Nu beginnen we opnieuw, met een andere markering, vanuit een nog niet gemarkeerd veld. Als we daarmee klaar zijn beginnen we weer opnieuw met een derde markering. We gaan zo daar tot alle 64 velden gemarkeerd zijn. Het blijkt dat dit het geval zodra we klaar zijn met de vijfde markering.

Op de namen van de markeringen na levert dit het volgende plaatje op

B	C	D	E	A	B	C	D
D	E	A	B	C	D	E	A
A	B	C	D	E	A	B	C
C	D	E	A	B	C	D	E
E	A	B	C	D	E	A	B
B	C	D	E	A	B	C	D
D	E	A	B	C	D	E	A
A	B	C	D	E	A	B	C

Het antwoord is dus 5.

4

Beschouw een willekeurige lijn ℓ in het vlak, en kijk wat er gebeurt als je met constante snelheid langs ℓ loopt. Zolang je de lijn BC niet kruist neemt de afstand tot BC eenparig toe (of af). Net zo iets geldt voor de lijnen AB en AC . Dus ook de som die in de opgave wordt genoemd verandert met constante snelheid, tenminste zolang je geen van de drie genoemde lijnen oversteekt.

Echter: zolang een grootte met constante snelheid verandert, kan deze geen maximum of minimum aannemen. Een minimum kan dus alleen worden aangenomen op het moment dat een van de drie lijnen wordt gekruist.

Hetzelfde verhaal gaat zelfs op als ℓ een van de drie genoemde lijnen is, bijvoorbeeld AB . Een minimum kan op de lijn AB alleen worden aangenomen op het moment dat een van de andere twee lijnen wordt gekruist.

Zo redenerend zien we dat alleen de drie snijpunten A , B en C in aanmerking komen voor een minimum. De genoemde som is in dat geval de lengte van de bij dat hoekpunt behorende hoogtelijn. Die lengte is het kleinste bij het hoekpunt waarvan de tegenoverliggende zijde het langste is (het product is immers twee keer de oppervlakte), dus in de opgave wanneer $P = C$. Een eenvoudige toepassing van Pythagoras leert dat de lengte van de hoogtelijn vanuit C gelijk is aan 3.

Overigens zegt bovenstaande redenering *niet* dat de som in C een minimum aanneemt. Hij zegt alleen dat *als* de som een minimum aanneemt dat *alleen* in C kan zijn. Zo neemt de som bijvoorbeeld geen maximum aan: als je P ver genoeg weg legt dan kun je de som willekeurig groot krijgen.

5

De gegeven figuur bestaat uit 15 kleine vierkantjes. De rechthoek moet even groot zijn en zal dus 1×15 of 15×1 of 3×5 of 5×3 moeten zijn. De eerste twee mogelijkheden zijn uitgesloten, aangezien we met twee delen van de gegeven figuur alleen iets kunnen vormen

dat hoogstens 8 vierkantjes breed of hoog is. Als we een kniplijn vinden die een rechthoek van 5×3 oplevert dan krijgen we door verwisselen van horizontaal en verticaal een kniplijn die een rechthoek van 3×5 oplevert.

b	c	d	e
a		i	j
f	g	h	p
k	l	m	n

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	P

Er zijn wel een paar overwegingen te maken:

- Elk van de drie 1×5 deelrechthoeken $ABCDE$, $FGHIJ$ en $KLMNP$ moet door de kniplijn worden doorsneden, anders is een van de twee delen 5 breed en past dus niet in de gegeven figuur.
- Als we er van uitgaan dat elk van die deelrechthoeken slechts één keer doorsneden wordt dan wordt de kniplijn bepaald door een drietal getallen tussen 1 en 4, namelijk de plekken waar de drie deelrechthoeken doorsneden worden. In bovenstaande figuur is dat drietal $(1, 3, 4)$.

Verder is het echter in hoofdzaak een kwestie van proberen. Bovenstaande figuur illustreert een oplossing: alle vierkantjes zijn van een naam voorzien op zo'n manier dat wanneer je de twee stukken van het vierkant op de rechthoek legt de kleine letters bovenop de corresponderende hoofdletters terechtkomen.

6

Als we die twee positieve gehele getallen a respectievelijk b noemen (dus met $a < b$), dan wordt de eis

$$b^2 - a^2 = 48$$

Nu is $(b + a)$ een positief geheel getal en deler van 48, en het quotiënt is $(b - a)$. Als we eenmaal $(b + a)$ en $(b - a)$ kennen, kunnen we eenvoudig b en a en dus $n = a^2$ bepalen. Dit leidt tot de volgende tabel

$b + a =$	$b - a =$	$b =$	$a =$	$n =$
48	1	*	*	*
24	2	13	11	121
16	3	*	*	*
12	4	8	4	16
8	6	7	1	1

Een aantal gevallen vallen uit omdat ze wel gehele waarden voor $b + a$ en $b - a$, maar niet gehele waarden voor a en b opleveren. Deze zijn met een sterretje aangegeven. Er blijven drie mogelijkheden voor n over: 121, 16 en 1.

7

Als $A \geq 2$ dan is $ABCDE \geq 20000$, dus $9 \times ABCDE \geq 180000$, wat teveel cijfers heeft; dus $A = 1$ of $A = 0$.

- *Het geval dat $A = 1$.*

Als $B \geq 2$ dan is $ABCDE \geq 12000$ dus $9 \times ABCDE \geq 108000$, wat teveel cijfers heeft; dus $B = 1$ of $B = 0$.

- *Het geval dat $A = 1$ en $B = 0$.*

Nu heeft $9 \times 10CDE$ hetzelfde laatste cijfer als $9 \times E$, en dat cijfer moet $A = 1$ zijn. Dit kan alleen als $E = 9$. Het op één na laatste cijfer van $9 \times 10CD9$ is nu hetzelfde als het laatste cijfer van $(9 \times D) + 8$, en dat cijfer moet $B = 0$ zijn. Dit betekent dat het laatste cijfer van $9 \times D$ gelijk is aan 2. Dit kan alleen als $D = 8$. De eis wordt nu dat $9 \times 10C89 = 98C01$. Dit betekent dat $900 \times C + 9 \times 10089 = 100 \times C + 98001$, dus $800 \times C = 7200$, dus $C = 8$.

- *Het geval dat $A = 1$ en $B = 1$.*

Dan vinden we net zo dat $D = 7$ en $E = 9$. De eis wordt dan $9 \times 11C79 = 97C11$, wat duidelijk niet kan omdat de linkerkant te groot is.

- *Het geval dat $A = 0$.*

Nu heeft $9 \times 0BCDE$ hetzelfde laatste cijfer als $9 \times E$, en dat cijfer moet $A = 0$ zijn. Dit kan alleen als $E = 0$. De eis kan nu worden ingekort tot $9 \times BCD = DCB$. Net zoals eerder zien we dat $B \geq 2$ onmogelijk is.

- *Het geval dat $A = 0$ en $B = 0$.*

De eis wordt dan $9 \times 0CD = DC0$, Dat levert $D = 0$ en vervolgens $C = 0$ zodat alle cijfers nullen zijn, wat verboden is.

- *Het geval dat $A = 0$ en $B = 1$.*

De eis wordt dan $9 \times 1CD = DC1$. Dat levert $D = 9$. Als $C = 0$ dan voldoet dit niet, en voor $C \geq 1$ wordt de linkerkant te groot.

8

Bekijk het algemenere geval waar het alfabet bestaat uit k klinkers en m medeklinkers.

- Er zijn twee patronen met drie klinkers en één medeklinker, namelijk KKMK en KMKK. Elk daarvan kan op k^3m manieren met concrete klinkers en medeklinkers worden ingevuld: k mogelijkheden voor de eerste klinker, k mogelijkheden voor de tweede klinker, enzovoorts. In de opgave zijn er dat $5^3 \times 20 = 2500$ manieren voor elk van beide patronen, dus in totaal 5000.

- Eveneens zijn er twee patronen met één klinker en drie medeklinkers, namelijk MM-KM en MKMM. Elk daarvan kan op km^3 manieren worden ingevuld. In de opgave zijn er dat $5 \times 20^3 = 40000$ manieren voor elke van beide patronen, dus in totaal 80000.
- Tenslotte zijn er zes patronen met twee klinkers en twee medeklinkers, namelijk KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK en MMKK. Elk daarvan kan op k^2m^2 manieren worden ingevuld. In de opgave zijn er dat $5^2 \times 20^2 = 10000$ manieren voor elk van de zes patronen, dus in totaal 60000

Totaal vinden we in het algemeen $2k^3m + 2mk^3 + 6k^2m^2 = 2km(k^2 + m^2 + 3km)$ woorden. In de opgave zijn dat er $5000 + 80000 + 60000 = 145000$.

9

Het is duidelijk dat we met die blokken alleen bouwsels kunnen maken waarvan de maten een veelvoud zijn van 2 cm. Laten we daarom een lengte van 2 cm kortweg een *duim* noemen. De blokken zijn dus 1 bij 2 bij 3 duim.

Als de te bouwen massieve kubus een ribbe van n duim heeft, dan is zijn inhoud n^3 kubieke duim. Dit moet een geheel veelvoud zijn van de inhoud van één enkel blok, zijnde 6 kubieke duim.

Maar n^3 kan alleen even zijn als n zelf even is. Evenzo kan n^3 alleen door 3 deelbaar zijn als n zelf een factor 3 bevat. Dus het feit dat n^3 deelbaar is door 6 betekent dat n zelf deelbaar is door 6, en zeker is $n \geq 6$.

We hebben dus in ieder geval minstens $\frac{1}{6}6^3 = 36$ blokken nodig. Met 36 blokken lukt het ook inderdaad, omdat we gemakkelijk met 6 blokken een laag van 1 bij 6 bij 6 duim kunnen bouwen.

10

De inleg van 1 januari 2003 wordt gehalveerd in alle oneven jaren, beginnend in 2003 en eindigend in 2043. Ze wordt verdubbeld in alle even jaren, beginnend in 2004 en eindigend in 2042. In totaal wordt ze één keer vaker gehalveerd dan verdubbeld. Dus op het eind is ze 500 euro waard.

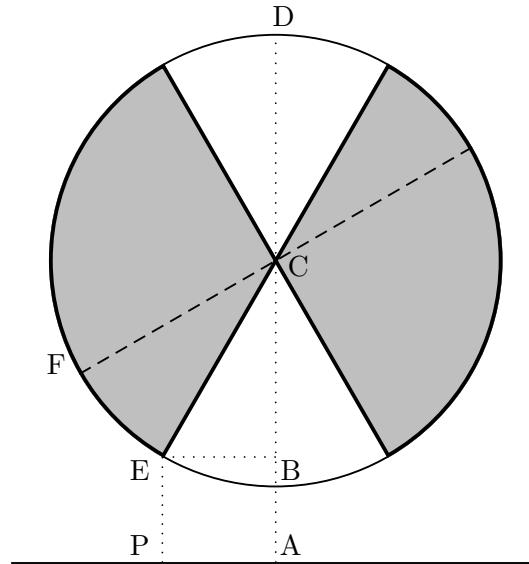
De inleg van 1 januari 2005 is op het eind eveneens 500 euro waard. Hetzelfde geldt voor alle oneven jaren van 2003 tot en met 2043. Samen dragen deze jaren 21 keer 500 euro tot het eindresultaat bij.

De inleg van 1 januari 2004 wordt even vaak gehalveerd als verdubbeld en is op het eind nog steeds 1000 euro waard. Hetzelfde geldt voor alle even jaren van 2004 tot en met 2042. Samen dragen deze jaren 20 keer 1000 euro tot het eindresultaat bij.

De totale waarde op het eind is dus $10500 + 20000$ euro

11

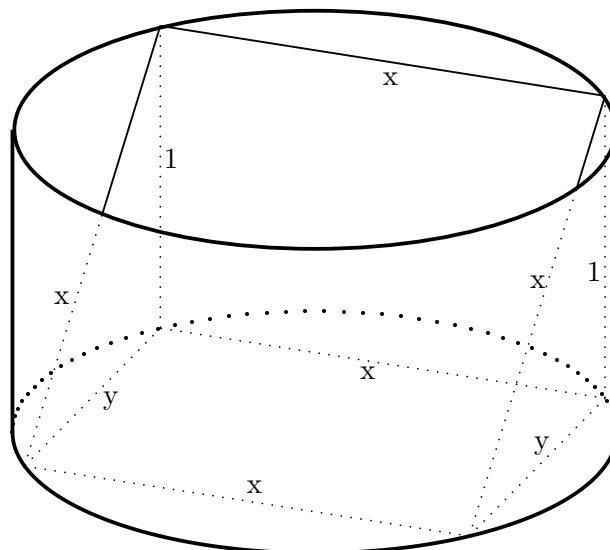
We schetsen een zij-aanzicht. Het punt P ligt in de schaduw zolang de plank CF zich in het grijze gebied beweegt.



De lengte van EB is gelijk aan die van PA , dus 2 meter. De lengte van EC is gelijk aan de halve lengte van de plank, dus 4 meter. Daaruit volgt dat $\angle(ECB) = 30^\circ$. De grijze sectoren hebben dus allebei een openingshoek van 120° en beslaan dus ieder éénderde van de hele schijf. Het antwoord is dus $\frac{2}{3}$ deel.

12

Schrijf x voor de lengte van de zijde van het vierkant en y voor de lengte van de projectie van de schuin omhoog lopende zijde op het grondvlak. Zie onderstaande figuur.



Passen we Pythagoras toe op de driehoek gevormd door die omhooglopende zijde en zijn grondvlak dan vinden we $x^2 = y^2 + 1$.

De projectie van het vierkant op het grondvlak geeft een rechthoek waarvan de diagonaal een middellijn is van het grondvlak en dus een lengte van 2 dm heeft. Passen we daarop Pythagoras toe dan vinden we $x^2 + y^2 = 4$.

Uit beide formules samen volgt dat $2x^2 - 1 = 4$, dus de oppervlakte x^2 bedraagt $\frac{5}{2}$.

13

Schrijf T voor het aantal factoren 2 in de priemfactor-ontbinding van $125!$, en V voor het aantal factoren 5 in die ontbinding. Dan is dat aantal nullen precies het kleinste getal van de getallen T en V . Laten we dus T en V bepalen.

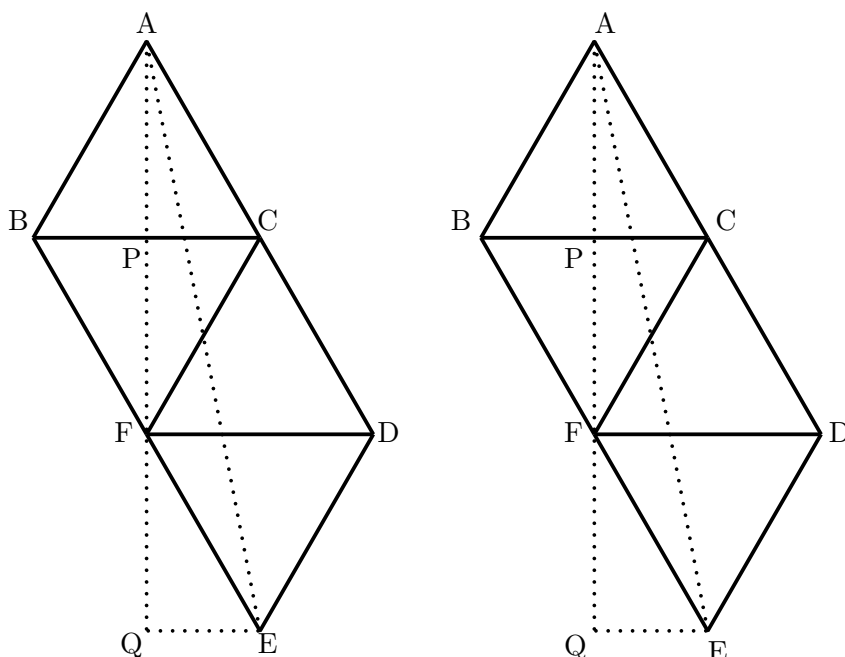
Getallen tussen 1 en 125 die geen 5-voud zijn leveren géén bijdrage aan V . De 25 getallen die dat wel zijn leveren elk een bijdrage van minstens 1 aan V . Voor de getallen die geen 25-voud zijn hebben we daarmee de volledige bijdrage aan V verrekend. Echter voor de 5 getallen die wel een 25-voud zijn is dat niet het geval; deze leveren nog een extra bijdrage van 1 aan V . Voor de getallen die geen 125-voud zijn hebben we daarmee de volledige bijdrage aan V verrekend. Echter voor 125 zelf is dat niet het geval; deze levert nog een derde bijdrage van 1 aan V . Aangezien er geen getallen onder de 125 zijn die vier factoren 5 bevatten hebben we nu alle bijdragen aan V gehad. Dus $V = 25 + 5 + 1 = 31$.

Op een soortgelijke manier kunnen we T bepalen. We hoeven eigenlijk alleen maar te weten dat $T \geq 31$, en dat is als snel duidelijk. De 62 even getallen onder de 125 leveren een bijdrage 1, de 31 viervouden leveren een tweede bijdrage 1 enzovoorts. Dus $T = 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 119$.

Het antwoord is dus 31.

14

We maken een uitslag van de relevante grensvlakken van het achthoek



Het is duidelijk dat van alle gebroken lijnen $AXYZE$ de ongebroken rechte lijn de kortste is. De lengte daarvan berekenen we met Pythagoras op de driehoek $\triangle AQE$. De lengte van AQ is drie keer de lengte van AP , welke $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ bedraagt. De lengte van QE is $\frac{1}{2}$. Dus het kwadraat van de lengte van AE is $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1+27}{4} = 7$. Het antwoord is dus $\sqrt{7}$.

15

De gewenste gelijkheid laat zich formuleren als

$$1100 \times a + 11 \times b = n^2$$

In het bijzonder is n^2 deelbaar door 11. Dit kan alleen als n zelf deelbaar is door 11, zeg $n = 11 \times k$. We kunnen de gewenste gelijkheid nu vereenvoudigen tot

$$100 \times a + b = 11 \times k^2$$

Deze formule zegt dat het op één na laatste cijfer van $11 \times k^2$ een 0 is. Proberen we $k = 1, 2, \dots, 9$ dan zien we dat dit alleen voorkomt voor $k = 8$, dus $n = 88$. Inderdaad is $88^2 = 7744$.

16

Laten we s schrijven voor de constante som van de opschriften van tegenover elkaar liggende grensvlakken.

Stel dat een grensvlak opschrift x heeft, en de vier naburige grensvlakken opschriften a , b , c en d hebben. Dan wordt in eerste instantie bij de vier hoekpunten de getallen $x + a + b$, $x + b + c$, $x + c + d$ en $x + d + a$ genoteerd. Vervolgens wordt bij het grensvlak zelf het getal $4x + 2a + 2b + 2c + 2d = 4x + 4s$ genoteerd. Bij het tegenoverliggende grensvlak wordt evenzo $4(s - x) + 4s$ genoteerd; samen is dat $12s$.

Het totaal van de zes getallen die bij de grensvlakken worden genoteerd is dus $36s$. Dit moet gelijk zijn aan $56 + 68 + 76 + 80 + 88 + 100 = 468$. Dus $s = 13$. Bij een grensvlak met opschrift x wordt dus $4x + 52$ genoteerd. Voor elk grensvlak is dit getal gegeven en kunnen we dus gemakkelijk x zelf terugvinden.

17

Bekijk het punt met rangnummer n , gerekend van onder af. Dan is de lengte van de weg via de onderzijde $10 + 40 + (n - \frac{1}{2})$ en de lengte van de weg via de bovenzijde $30 + 40 + (40 - (n - \frac{1}{2}))$.

De weg onderlangs is dus korter zolang $2n < 61$, dus voor $n = 1, 2, \dots, 30$. De lengtes zijn dan $50\frac{1}{2}, 51\frac{1}{2}, \dots, 79\frac{1}{2}$, met gemiddelde $\frac{1}{2}(50\frac{1}{2} + 79\frac{1}{2}) = 65$, en totaal $30 \times 65 = 1950$.

De weg bovenlangs is korter voor $n = 31, 32, \dots, 40$. De lengtes zijn dan $79\frac{1}{2}, 78\frac{1}{2}, \dots, 70\frac{1}{2}$, met gemiddelde $\frac{1}{2}(79\frac{1}{2} + 70\frac{1}{2}) = 75$, en totaal $10 \times 75 = 750$.

De totale lengte van alle 40 wegen is dus $1950 + 750 = 2700$, en de gemiddelde lengte is dus $2700/40 = 67\frac{1}{2}$.

18

Bekijk een 2×3 of 3×2 deelrechthoekje van het 4×4 vierkant, zoals hieronder aangegeven

a	x	c
b	y	d

a	b
x	y
c	d

Dan hebben we $a + b + x + y = c + d + x + y$, en dus $a + b = c + d$. Op grond hiervan kunnen we twee plekken invullen:

	7		3
9	2		6
1	10		?

Bekijk nu een 3×3 deelvierkant van het 4×4 vierkant, zoals hieronder aangegeven

A	X	B
C	Y	D

Op grond van de eerdere opmerking hebben we dan $A + X = C + Y$ en $X + B = Y + D$, en dus $A - B = C - D$. Op grond hiervan kunnen we de gevraagde plek invullen:

	7		3
9	2		6
1	10		14

Tenslotte merken we op dat er drie manieren zijn om het vierkant af te maken:

16	7	12	3
9	2	13	6
8	15	4	11
1	10	5	14

16	7	13	3
9	2	12	6
8	15	5	11
1	10	4	14

16	7	12	3
9	2	13	6
15	8	11	4
1	10	5	14

19

Stel dat Jans leeftijd uit de cijfers a en b bestaat, in die volgorde. Dan is Jans leeftijd $10a + b$, en die van zijn zoontje $(10a + b) - 3(a + b) = 7a - 2b$. We vinden dus dat $7a - 2b = 4$.

Nu is $7a = 2b + 4$ even en deelbaar door 7, en ligt bovendien tussen 4 en 22, aangezien $0 \leq b \leq 9$. Het enige getal dat daar aan voldoet is 14. Dus $a = 2$ en $b = 5$, en Jans leeftijd is 25 jaar.

Stel dat de leeftijd van Jans vader uit de cijfers c en d bestaat, in die volgorde. Dan vinden we $7c - 2d = 25$. Nu is $7c$ oneven en ligt tussen 25 en 43. Dit levert $c = 5$ en $d = 5$.

Stel de leeftijd van Jans vader uit de cijfers e en f bestaat, in die volgorde. Dan hebben we $7e - 2f = 55$. Nu is $7f$ oneven en ligt tussen 55 en 73. Dit levert $e = 9$ en $f = 4$.

20

Laat u , v en w willekeurige reële getallen zijn. Dan is de waarde van de breuk $\frac{x+u}{vx+w}$ gelijk aan c voor alle $x \neq \frac{-w}{v}$ precies als $c(vx + w) = (x + u)$ voor *alle* x . Dat is het geval precies als tegelijk $cv = 1$ en $cw = u$. Er is een dergelijke c (namelijk $\frac{1}{v}$) precies als $v \neq 0$ en $\frac{w}{v} = u$. De laatste eis kunnen we beter herschrijven als $w = vu$.

Hier komen we dus uit op de eis $4a + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$. Deze eis is te vereenvoudigen tot $4a = a^3$, met als oplossingen $a = -2$, $a = 0$ en $a = 2$. Aan de voorwaarde $4a + 1 \neq 0$ is in alle drie gevallen voldaan.