

	1					
				7		
2		4				
14						



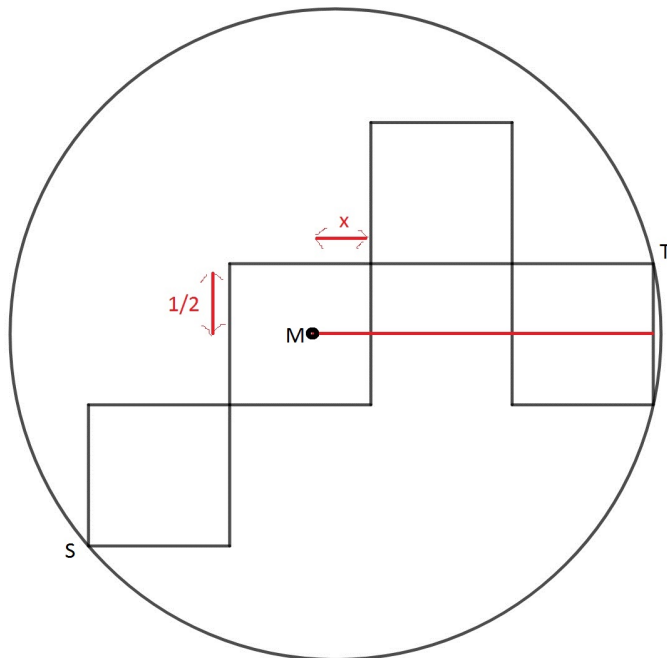
## Uitwerking opgave 1

Als we alleen naar de minuten kijken, dan komen 1 en 2 elk uur even vaak voor. Dus het verschil komt alleen van de uren. In de 24 mogelijke uurtallen (van 00 tot en met 23) komen in totaal 13 enen voor, en 7 tweeën. Dat maakt een verschil van 6 – voor de uren. Elk uurtal komt precies 60 keer voor (want dat is het aantal minuten in een uur). Het totale verschil wordt dan

$$13 \cdot 60 - 7 \cdot 60 = 6 \cdot 60 = 360.$$

## Uitwerking opgave 2

We gaan het middelpunt  $M$  van de cirkel bepalen. Het ligt duidelijk in het middelste vierkantje, op afstand  $1/2$  van de bovenkant van dat vierkantje. We noemen de afstand van  $M$  tot de rechterkant van dat vierkant  $x$ .



De straal  $r$  van de cirkel kunnen we op twee manieren bepalen: als  $r = |MS|$  en als  $r = |MT|$ . Met Pythagoras berekenen we:

$$\begin{aligned} |MS|^2 &= (2 - x)^2 + (3/2)^2 = x^2 - 4x + 4 + 9/4, \\ |MT|^2 &= (2 + x)^2 + (1/2)^2 = x^2 + 4x + 4 + 1/4. \end{aligned}$$

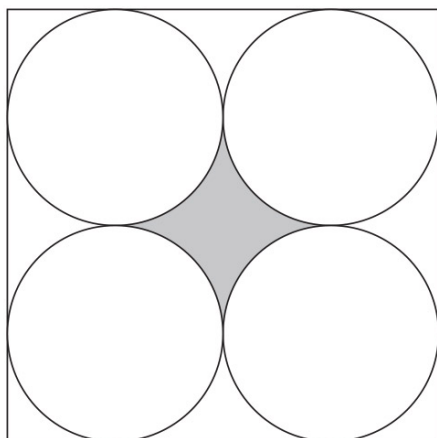
Deze twee gelijkstellen geeft  $8x - 8/4 = 0$ , dus  $x = 1/4$ . Dan volgt

$$r = \sqrt{(1/4)^2 + 4 \cdot 1/4 + 4 + 1/4} = \sqrt{85/16}.$$

De oppervlakte van de schijf wordt daarmee  $\pi r^2 = 85\pi/16$ .

### Uitwerking opgave 3

In de onderstaande tekening heeft het grote vierkant oppervlakte  $4 \cdot 4 = 16$ .



Elk van de 4 cirkelschijven heeft oppervlakte  $\pi$ , dus heeft vierkant zonder de cirkelschijven oppervlakte  $16 - 4\pi$ . Dat gebied is 4 keer zo groot als het grijze gebied, dus dat laatste heeft oppervlakte  $(16 - 4\pi)/4 = 4 - \pi$ .

### Uitwerking opgave 4

Merk op dat het eerste cijfer van een autobiografisch getal nooit 0 is, omdat het aangeeft hoeveel nullen er in zitten.

We proberen eerst een autobiografisch getal met vier cijfers te vinden, groter dan 2020. De som van de 4 cijfers is het aantal cijfers, namelijk 4. Voor cijfers groter dan 3 is er geen positie in het getal die aangeeft hoe vaak ze voorkomen, dus die zitten er niet in. Per aanname is het eerste cijfer minstens 2, dus 2 of 3. Maar 3 kan niet, want dan zouden er 3 nullen in zitten, terwijl 3000 niet autobiografisch is. Als het eerste cijfer 2 is, dan zitten er 2 nullen in, dus de overige cijfers zijn 0, 0 en 2. Met de autobiografische eigenschap zien we dat het getal dan 2020 is. Dus het kan niet met 4 cijfers.

Nu bekijken we een autobiografisch getal  $abcde$  met 5 cijfers. Dan

$$a + b + c + d + e = 5 \tag{1}$$

en cijfers groter dan 4 komen niet voor. We willen het getal zo klein mogelijk en  $a \neq 0$ , dus we proberen  $a = 1$ . Dan  $b + c + d + e = 4$  en er zit precies één 0 tussen. Nu  $b \neq 0$  (omdat er al een 1 in zit) en  $b \neq 1$  (want dan zouden er al 2 enen in zitten). Als  $b = 2$  dan  $c \geq 1$  en dus  $d \geq 1$ , maar dat is in tegenspraak met (1). Als  $b = 3$ , dan  $d \geq 1$  en (1) dwingt ons tot 13010 – wat echter niet autobiografisch is. Dus het lukt niet met  $a = 1$ .

Vervolgens proberen we  $a = 2$ . Dan  $b + c + d + e = 3$  en daar zitten precies 2 nullen bij. De laatste 4 cijfers zijn dus 0, 0, 1, 2 (in één of andere volgorde). Kennelijk zitten er

geen cijfers  $\geq 3$  in het getal, dus op de vierde en vijfde positie moet 0 staan. Er komen 2 tweeën en één 1 in voor, dus  $b = 1$  en  $c = 2$ .

Het getal 21200 is inderdaad autobiografisch, en het bovenstaande argument toont aan dat het het enige autobiografische getal met vijf cijfers is.

## Uitwerking opgave 5

De zijden van  $A_0$  hebben product 1, dus zijn van de vorm  $a, 1/a$  voor een  $a \geq 1$  (in meters).

Dan zijn de zijden van  $A_1$ :  $a/2$  en  $1/a$ , met  $a/2 \leq 1/a$ . De zijden van  $A_2$  zijn  $a/2$  en  $1/(2a)$  en de zijden van  $A_3$  zijn  $1/(2a)$  en  $a/4$ . Dus de zijden van  $A_4$  zijn  $a/4$  en  $1/(4a)$ , waarbij  $a/4 \geq 1/(4a)$ .

De eigenschap van de diagonalen van deze vellen betekent dat de verhouding  $a : 1/a$  gelijk is aan  $1/a : a/2$ . Dus  $a^2 : 1 = 2/a^2 : 1$  en dan  $a^4 = 2$  en  $a = \sqrt[4]{2}$ .

De gezochte lengte is dan  $a/4 = \sqrt[4]{2}/4$  meter, oftewel  $25\sqrt[4]{2}$  centimeter.

## Uitwerking opgave 6

We gaan aantonen dat het plan  $2 - 3 - 3 - 2$  altijd tot winst leidt.

Als het eerste getal van Donovan 2 is, dan win je direct. Als het eerste getal van Donovan 4 is, dan is zijn tweede getal 3, en win je in de tweede stap.

Stel dat het eerste getal van Donovan 1 is. Dan is zijn tweede getal 2, en dat raadt je dus niet. Het derde getal van Donovan is dan 1 of 3. Als het 3 is, dan win je in de derde stap. Als het 1 is, dan is het vierde getal van Donovan 2, en win je in de vierde stap.

Stel nu dat het eerste getal Donovan 3 is. Als zijn tweede getal 4 is, dan raden we dat niet. Maar zijn derde getal is 3, en dat hebben wij ook. Als het tweede getal van Donovan 2 is, dan zitten we in de situatie hierboven, en winnen we dus.

Een ander winnend plan is  $3 - 2 - 2 - 3$ , want ontstaat uit  $2 - 3 - 3 - 2$  door de symmetrie  $1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3$  te gebruiken.

Andere strategieën werken niet. Bijvoorbeeld, het plan  $2 - 3 - 2 - 3$  faalt vanwege de mogelijkheid dat Donovan  $3 - 4 - 3 - 4$  kiest.

## Uitwerking opgave 7

We noteren de gezochte straal met  $r$ . Zij  $A$  het middelpunt van de grote cirkel,  $B$  het middelpunt van de linker ingeschreven cirkel en  $C$  het middelpunt van de gearceerde cirkel. Zij  $D$  het snijpunt van (de rand van) de gearceerde cirkel met de grote cirkel. Dan  $|AD| = 2$ , de straal van de grote cirkel.

Ook  $|AD| = |AC| + |CD| = |AC| + r$ . Met de stelling van Pythagoras gaan we  $|AC|$  bepalen.  $|AB|$  is de straal van de linker cirkel, dus  $|AB| = 1$ . Het lijnstuk  $BC$  bestaat uit een deel met lengte de straal van de linker cirkel en een deel met lengte de straal van de gearceerde cirkel. Dus  $|BC| = 1 + r$ . Pythagoras voor de driehoek  $ABC$  zegt dan  $|AC|^2 = (1 + r)^2 - 1^2 = r^2 + 2r$ .

Deze gegevens combineren we tot

$$2 = |AD| = |AC| + r = \sqrt{r^2 + 2r} + r$$

Dit geeft  $r^2 + 2r = (2 - r)^2 = r^2 - 4r + 4$ . Dus  $6r = 4$  en  $r = 2/3$ .

## Uitwerking opgave 8

We vergelijken woorden die slechts één letter verschillen. Dat geeft een tweetal letters die van één dobbelsteen komen. Zulke paren zijn:

KP, AU, ST

Vanwege PAS, horen deze drie paren bij verschillende dobbelstenen. Om TS te completeren moeten we een letter kiezen uit MO (vanwege MOP) en een letter uit IL (door UIL). In het bijzonder staan Z en N niet op de dobbelsteen met TS. Gezien ZON betekent dat er een dobbelsteen met TSO is. Uit MOP zien we dat AUM op een andere dobbelsteen staat. Tot nu toe hebben we:

KP, AMU, OST

Vanwege MIN, is de vierde letter bij OST een I of een N. We wisten al dat het een L of een I was, dat het is I. Dan staat N op dezelfde dobbelsteen als LP, vanwege MIN. Dat geeft:

KNP, AMU, IOST

Door ZON krijgen we AMUZ, en door UIL krijgen we KNLP.

## Uitwerking opgave 9

Vijf opeenvolgende getallen vormen een rijtje  $k, k + 1, k + 2, k + 3, k + 4$ , waarbij  $k$  een natuurlijk getal is. De som daarvan is  $5k + 10$ . Dus het getal is een 5-voud.

Zes opeenvolgende getallen vormen een rijtje  $l, l + 1, l + 2, l + 3, l + 4, l + 5$ . De som daarvan is  $6l + 15 = 6(l + 2) + 3$ . Dus  $n$  is van de vorm (6-voud plus 3). We kunnen schrijven

$$n = 6(l + 2) + 3 = 5(l + 2) + (l + 2) + 3 = 5(l + 3) + l$$

Omdat  $n$  een 5-voud is, moet  $l$  ook een 5-voud zijn, zeg  $l = 5l'$ . Dan

$$n = 5(5l' + 3) + 5l' = 30l' + 15.$$

Zeven opeenvolgende getallen vormen een rijtje  $m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4, m + 5, m + 6$ . De som daarvan is  $7m + 21 = 7(m + 3)$ . Dus  $n$  is een 7-voud. Er geldt ook

$$n = 30l' + 15 = 28l' + 21 + 2l' - 6 = 7(4l' + 3) + 2(l' - 3)$$

Dit is alleen een 7-voud als  $2(l' - 3)$  een 7-voud is, en dat gebeurt alleen als  $l' - 3$  een 7-voud is. Zeg  $l' = 7m' + 3$ . Dan

$$n = 30 \cdot (7m' + 3) + 15 = 210m' + 90 + 15 = 210m' + 105.$$

De kleinste mogelijkheid om met deze uitdrukking een getal groter dan 200 te maken, is door  $m' = 1$  te kiezen. Dan  $n = 210 + 105 = 315$ .

## Uitwerking opgave 10

We noemen de piraten (van oud naar jong) Alex, Bas, Coen, Dirk en Eddie. We redeneren terug vanuit de gevallen met minder piraten.

2 piraten: Dirk verdeelt de schat als  $100 : 0$  (dus hijzelf krijgt alles). Zijn ene stem is genoeg om het voorstel door te drukken.

3 piraten: Coen stelt voor  $99 : 0 : 1$ . Eddie zal dit accepteren (hoewel hij slechts 1 goudstuk krijgt), omdat hij helemaal niks krijgt als dit voorstel verworpen wordt. Samen met Coen hebben ze twee stemmen voor.

Het zou voor Coen niet werken om  $100 : 0 : 0$  voor te stellen. Dan zou Eddie namelijk sowieso 0 munten krijgen, en zou hij uit bloeddorst tegen stemmen.

4 piraten: Bas verdeelt de buit als  $99 : 0 : 1 : 0$ . Dirk zal hier voor stemmen, omdat hij weet dat hij anders (in het geval met 3 piraten) geen enkel goudstuk zal krijgen. De twee stemmen voor van Bas en Dirk zijn de helft, dus het voorstel wordt aangenomen.

5 piraten: Alex stelt de verdeling  $98 : 0 : 1 : 0 : 1$  voor. Coen en Eddie realiseren zich dat ze in het geval van 4 piraten nul goudstukken zullen krijgen, dus stemmen voor. Samen met Alex geeft dat een meerderheid, dus Alex krijgt maar liefst 98 goudstukken.

Het kan voor Alex niet beter dan dit. Want bij een voorstel met minstens 99 goudstukken voor Alex, zou Coen of Eddie nul goudstukken krijgen. Voor Bas en Dirk is zo'n voorstel zeker niet gunstiger dan het geval met 4 piraten, dus zij stemmen in ieder geval tegen. Voor het aantal goudstukken van Coen/Eddie zou het niet uitmaken of hij voor of tegen zou stemmen, dus zou hij tegen stemmen en Alex voor de haaien laten gooien.

## Uitwerking opgave 11

(A) en (B) zijn met elkaar in tegenspraak, dus kunnen nooit allebei gelden. Daaruit zien we dat (C) zeker niet waar is, en dus is (A) ook niet waar. Als nu (B) waar is, dan zou (D) niet gelden terwijl de uitspraak van (D) wel klopt. Dus (B) is niet waar. Dan zijn (A), (B) en (C) niet waar, en daarmee (D) ook niet. (E) geldt dan wel, en tenslotte klopt (F) weer niet.

## Uitwerking opgave 12

Door een deling met rest kunnen we de opgave overvoeren in een eenvoudigere vraag. Het handigste is om daarbij de term  $-1$  van de noemer als spil te gebruiken, omdat delen door  $-1$  gehele getallen geheel laat. Met zo'n deling werken we de lage machten van  $n$

weg uit  $9n^2 + 16n - 4$ .

$$\begin{array}{r} -1 + 2n \quad / \quad -4 \quad +16n \quad +9n^2 \quad \setminus \quad 4 - 8n \\ \hline \quad \quad -4 \quad +8n \\ \hline \quad \quad \quad 8n \quad +9n^2 \\ \quad \quad \quad \quad 8n \quad -16n^2 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 25n^2 \end{array}$$

Uit deze staartdeling zien we dat

$$\frac{9n^2 + 16n - 4}{2n - 1} = 4 - 8n + \frac{25n^2}{2n - 1}.$$

Deze uitdrukking is een geheel getal precies dan als  $\frac{25n^2}{2n - 1}$  geheel is. Aangezien

$$\text{ggd}(n, 2n - 1) = \text{ggd}(n, -1) = 1,$$

gebeurt dit alleen als  $2n - 1$  een deler van 25 is. De delers van 25 zijn 1, 5 en 25. Deze corresponderen met  $n = 1$ ,  $n = 3$  en  $n = 13$ . Dus voor die  $n$  is de gegeven breuk een geheel getal, en voor andere  $n$  niet.

### Uitwerking opgave 13

Op 400 meter staat Maartje op  $1/5$  van de hoogte van de berg. De omtrek van de berg op die hoogte is  $4/5$  van de omtrek van de berg op hoogte 0.

De hele situatie is als aan het begin van de beklimming, alleen alles geschaald met een factor  $4/5$ . Door een verdere wandeling,  $4/5$  keer zo lang als de eerdere wandeling, kan Maartje weer precies aan de tegenoverliggende kant van de berg komen. Het aantal meters dat zij daarbij stijgt is  $400 \cdot 4/5 = 320$ . In totaal staat Maartje dan  $400 + 320 = 720$  meter hoog.

### Uitwerking opgave 14

Zij  $P_n$  het aantal stippen in de  $n$ -de stap. Uit de plaatjes zien we dat  $P_1 = 1$  en

$$P_n = P_{n-1} + 3n - 2 \quad \text{voor } n \geq 2.$$

Er is formule voor getallen  $P_n$ , die niet zo eenvoudig te vinden is, maar wel makkelijk te controleren als we hem eenmaal hebben. Definieer  $a_n = (3n^2 - n)/2$ . Dan  $a_1 = 1$  en

$$\begin{aligned} 2(a_n - a_{n-1}) &= (3n^2 - n) - (3(n-1)^2 - (n-1)) \\ &= 3n^2 - n - (3n^2 - 6n + 3 - n + 1) = 6n - 4. \end{aligned}$$

Oftewel,  $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$ , dezelfde relatie als voor de  $P_n$ . Aangezien  $P_1 = a_1$ , volgt hieruit (met inductie) dat  $P_n = a_n$  voor alle  $n$ .

In het bijzonder

$$P_{2020} = a_{2020} = (3 \cdot 2020^2 - 2020)/2 = (12241200 - 2020)/2 = 6119590$$

Een manier om de formule voor  $P_n$  is als volgt. Stel dat  $P_n = an^2 + bn + c$ , waarbij  $a, b$  en  $c$  breuken zijn. Dan vinden we uit de recursieve betrekking dat  $b = -2a + b + 3$  en  $c = a - b + c - 2$ . Daaruit volgt  $a = 3/2$  en  $b = -1/2$ . Uit de beginvoorwaarde  $P_1 = 1$  krijgen we  $c = 0$ .

## Uitwerking opgave 15

De enige getallen die aan vier van de vijf condities kunnen voldoen zijn 50 en 52. Het getal 50 is echter geen 9-voud min 2 (en voldoet trouwens ook niet aan iv). Het getal 52 is wel een 9-voud min 2, maar geen som van kwadraten van verschillende priemgetallen. Namelijk, de enige priemgetallen die daarvoor in aanmerking komen zijn 2, 3, 5 en 7. Echter,  $7^2 = 49 < 52$  en  $7^2 + 2^2 = 53 > 52$ . Ook zonder  $7^2$  lukt het niet, want  $2^2 + 3^2 + 5^2 = 4 + 9 + 25 = 38 < 52$ . Dus zowel 50 als 52 hebben hoogstens drie van de vijf eigenschappen.

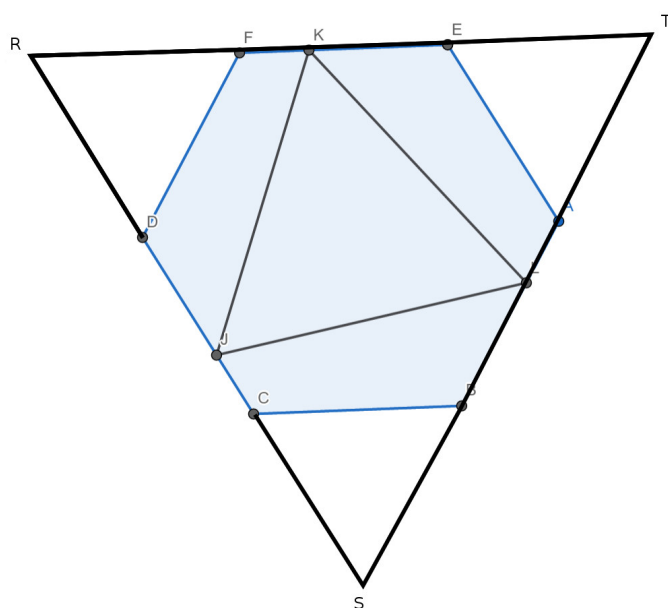
Elk ander getal met drie van de vijf eigenschappen moet voldoen aan (iii), (iv) en (v). Dan is het een 18-voud min 2. De kleinste mogelijkheid daarvoor is 16, maar die voldoet niet aan (iv) omdat  $4^2 = 16$  geen kwadraat van een priemgetal is en  $2^2 + 3^2 = 13 < 16$ . De op één na kleinste oplossing voor (iii) en (v) is 34, en die kan geschreven worden als  $3^2 + 5^2 = 9 + 25$ . Dus 34 is het kleinste getal dat aan drie van de vijf condities voldoet.

## Uitwerking opgave 16

We stellen de lengte van de zijden van de regelmatige zeshoek op 1. De zeshoek is een vereniging van zes gelijkzijdige driehoeken met zijden van lengte 1. Elk van deze driehoeken heeft oppervlakte  $\sqrt{3}/4$ . De oppervlakte van de zeshoek is dus

$$6 \cdot \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/2$$

We willen  $|JL|$  bepalen. Door de zijden  $CD$ ,  $EF$  en  $AB$  te verlengen, bedden we de zeshoek in in een gelijkzijdige driehoek  $\triangle RST$  met zijden van lengte 3. Hierbij is  $S$  het snijpunt van het verlengde van  $DC$  met het verlengde van  $AB$ .



Bekijk nu de driehoek  $\triangle JLS$ . Per constructie geldt  $|JS| = 4/3$  en  $|LS| = 5/3$ . Volgens

de cosinusregel:

$$\begin{aligned} |JL|^2 &= |JS|^2 + |LS|^2 - 2|JS||LS|\cos(60^\circ) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\frac{4}{3}\frac{5}{3}\frac{1}{2} \\ &= \frac{16 + 25 - 20}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Dus  $|JL| = \sqrt{7/3}$ . De oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek  $\triangle JKL$  wordt daarmee

$$\sqrt{3}/4 \cdot \sqrt{7/3}^2 = 7\sqrt{3}/12$$

Nu berekenen we de gezochte verhouding tussen de oppervlakten van  $\triangle JKL$  en de zeshoek:

$$\frac{7\sqrt{3}/12}{3\sqrt{3}/2} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 12} = \frac{7}{18}$$

## Uitwerking opgave 17

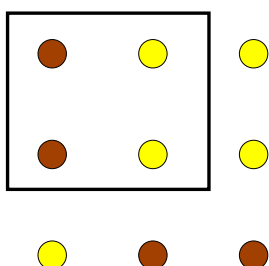
We zoeken  $p$  en  $A$  zodat  $A \cdot p/100 = 2020$ . Dan  $A \cdot p = 202\,000$ . Uit  $A \leq 10\,000$  volgt  $p \geq \frac{202\,000}{10\,000} = 20,2$ .

Het getal  $p$  deelt  $202\,000 = 101 \cdot 2000$ . Aangezien 101 priem is en  $p > 20$  geen deler van 101, is  $p$  een deler van 2000. De delers van 2000 tussen 21 en 100 zijn 25, 40, 50, 80 en 100. Dat levert voor  $A$  respectievelijk 8080, 5050, 4040, 2525 en 2020.

Dus er zijn precies vijf mogelijke paren  $(p, A)$ .

## Uitwerking opgave 18

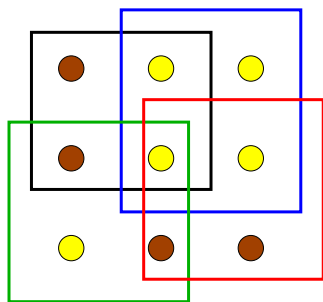
Bekijk vier munten die een vierkantje vormen, bijvoorbeeld de vier linksboven.



Aan het begin is het aantal keren kop in dat vierkantje even. Als je een rij of een kolom van de negen munten omdraait, dan verander je in dat vierkantje linksboven nul of twee munten. Dus het aantal keren kop in dat kleinere vierkantje blijft altijd even.

Datzelfde geldt voor het vierkantje dat bestaat uit de vier munten rechtsboven, en natuurlijk ook voor de soortgelijke vierkantjes linksonder en rechtsonder.





Nu gaan we tellen hoeveel patronen er zijn die aan deze condities voldoen. Begin met het vierkantje linksboven. Voor de drie munten het meest linksboven kiezen we kop of munt willekeurig. Dat geeft  $2^3 = 8$  mogelijkheden. Dan ligt de munt in het midden van het grote vierkant vast, door de conditie op het vierkantje linksboven.

Bekijk nu het vierkant rechtsboven. De twee munten in de doorsnede van de vierkantjes linksboven en rechtsboven hebben we al gekozen, van die twee krijgen we al een even of een oneven aantal keer kop. Voor de overige twee munten in het vierkant rechtsboven zijn aanvankelijk  $2^2 = 4$  opties, maar omdat het totaal aantal keren kop rechtsboven even moet zijn, blijven daarvoor slechts 2 mogelijkheden over.

Voor de zes vierkantjes in de bovenste twee rijen kunnen we dus kiezen uit  $8 \cdot 2 = 16$  patronen.

Bekijk vervolgens het vierkantje linksonder. Een redenering zoals met het vierkantje rechtsboven laat zien dat er precies twee mogelijke keuzes zijn voor het onderste paar munten in dat vierkantje. Nu hebben we alles gekozen, behalve de ene munt rechtsonder. De conditie op het  $2 \times 2$ -vierkant rechtsonder zegt dat die munt vastligt door de keuzes van de andere drie munten in dat kleinere vierkant.

In totaal vinden we  $16 \cdot 2 = 32$  patronen.

Dat zegt in principe nog niet dat we al die 32 patronen ook echt kunnen maken, dus dat gaan we na. In het vierkantje linksboven kan je alle 8 opties krijgen door te draaien met de linkerkolom, de middelste kolom, de bovenste rij en de middelste rij – dat zie je het makkelijkst door gewoon wat te draaien.

Als we op die manier linksboven een  $2 \times 2$ -patroon hebben gevormd, dan staat rechtsboven ook een patroon dat aan de condities voldoet. Op de bovenste twee rijen is, gegeven het vierkantje linksboven, precies één ander patroon mogelijk. Dat kunnen we krijgen door de rechterkolom om te draaien.

Ook linksonder staat nu al een geldig patroon. Gegeven de bovenste twee rijen, is er precies één ander mogelijk patroon in het  $2 \times 2$ -vierkant linksonder. Dit kunnen we maken door de onderste rij om te draaien. De ene munt rechtsonder ligt vast door de rest, dus daar hoeven we niks meer aan te doen.

We concluderen dat alle 32 patronen die aan de condities op de  $2 \times 2$ -vierkantjes voldoen ook echt gemaakt kunnen worden.

## Uitwerking opgave 19

Per aanname geldt

$$|AB| : |BC| = |PQ| : |PS| = |BC| : |PS|,$$

$$|AB| \cdot |BC| \cdot \frac{64}{100} = |PQ| \cdot |PS| = |BC| \cdot |PS|.$$

Uit de eerste vergelijking krijgen we  $|PS| = |BC|^2 : |AB|$ . Dat substitueren we in de tweede vergelijking:

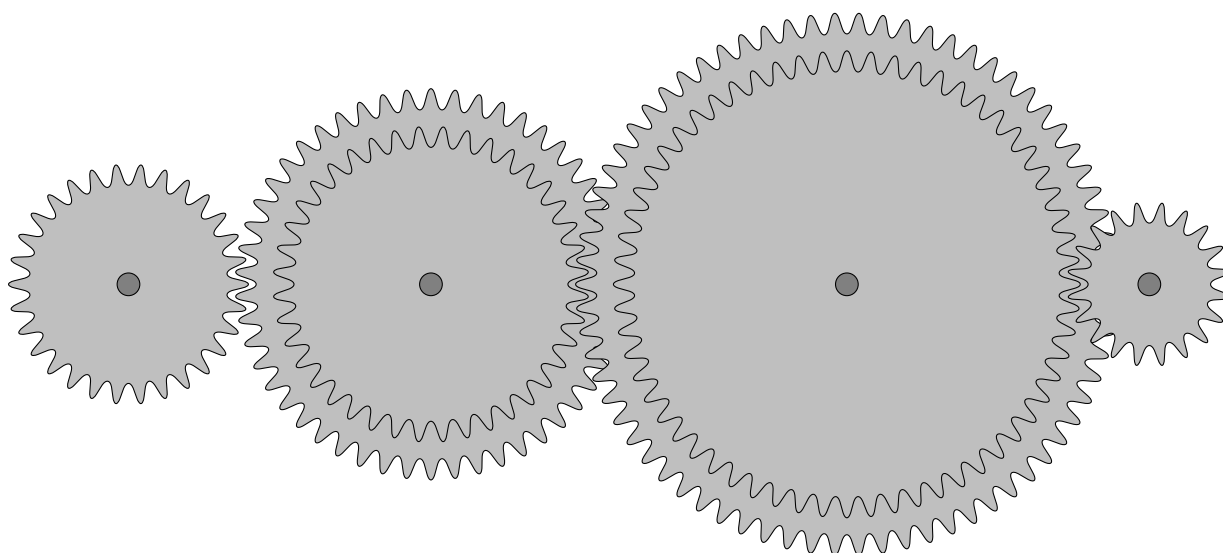
$$|AB| \cdot |BC| \cdot \frac{64}{100} = |BC| \cdot |PS| = |BC|^3 : |AB|.$$

Hieruit concluderen we dat  $|AB|^2 \cdot \frac{64}{100} = |BC|^2$ , dus

$$|BC| = |AB| \cdot \sqrt{\frac{64}{100}} = |AB| \cdot \frac{8}{10} = |AB| \cdot \frac{4}{5}$$

Dan  $|AB| : |BC| = 5/4$ .

## Uitwerking opgave 20



De drie tandwielovergangen kiezen we bijvoorbeeld als volgt: van 30 tanden naar 50 tanden, van 40 naar 70, en van 60 naar 20. De versnelling is dan

$$\frac{30 \cdot 40 \cdot 60}{50 \cdot 70 \cdot 20} = \frac{72\,000}{70\,000} = \frac{36}{35}$$

Beter dan dat kan niet, want de versnelling van elke combinatie is te schrijven als  $a/b$ , waarbij

$$a \cdot b = 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 70 = 10^6 \cdot 7! = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7.$$

In een gereduceerde schrijfwijze van  $a/b$  blijven dus in ieder geval een priemfactor 5 en een priemfactor 7 staan. Dus is  $a/b$  van de vorm  $c5/7$ ,  $c7/5$ ,  $c/35$  of  $35c$ , waarbij  $c$  een breuk is die gemaakt wordt met priemfactoren 2, 3 en 5. Met zulke  $c$  is het niet mogelijk of  $5/7$  of  $7/5$  beter te benaderen dan met een factor  $35/36$ . De beste benadering van  $1/35$  met zo'n  $c$  is  $1/36$ , en van  $35/36$  en  $36/35$  is de eerste uitgesloten omdat die kleiner dan 1 is.