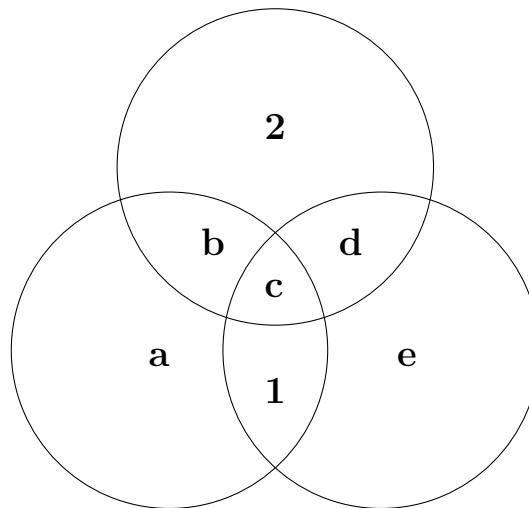

WISKUNDE-ESTAFETTE 2009

Uitwerkingen

1

We geven eerst namen aan de gebieden, als volgt:



Uit het feit dat de linkercirkel en de bovencirkel dezelfde som geven volgt dat $a + b + c + 1 = b + c + d + 2$ wat vereenvoudigt tot $a = d + 1$. Dat laat als mogelijkheden: $d = 3, a = 4$ of $d = 4, a = 5$ of $d = 5, a = 6$ of $d = 6, a = 7$.

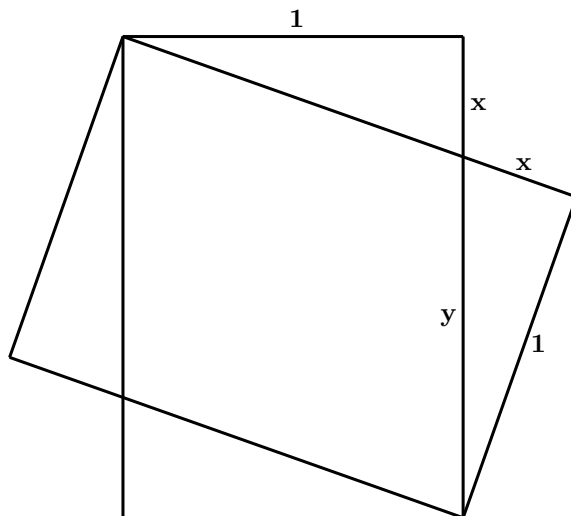
Uit het feit dat rechtercirkel en bovencirkel dezelfde som geven volgt evenzo dat $e = b + 1$. Dat laat als mogelijkheden: $b = 3, e = 4$ of $b = 4, e = 5$ of $b = 5, e = 6$ of $b = 6, e = 7$.

De overlappende combinaties $d = 3, a = 4$ en $b = 4, e = 5$ kunnen niet tegelijk optreden omdat de waarde 4 maar één keer mag worden toegekend. Op deze manier blijven slechts de volgende combinaties over:

- De combinatie van $d = 3, a = 4$ met $b = 5, e = 6$. Dan is $c = 7$ en krijgen we een verdeling die voldoet, met som 17. De combinatie van $d = 5, a = 6$ met $b = 3, e = 4$ is het spiegelbeeld en geeft dezelfde som.
- De combinatie van $d = 3, a = 4$ met $b = 6, e = 7$. Dan is $c = 5$ en krijgen we een verdeling die voldoet, met som 16. De combinatie van $d = 6, a = 7$ met $b = 3, e = 4$ is het spiegelbeeld en geeft dezelfde som.
- De combinatie van $d = 4, a = 5$ met $b = 6, e = 7$. Dan is $c = 3$ en krijgen we een verdeling die voldoet, met som 15. De combinatie van $d = 6, a = 7$ met $b = 4, e = 5$ is het spiegelbeeld en geeft dezelfde som.

2

De driehoek die boven overschiet van het rechte A4tje en de driehoek die rechts overschiet van het scheve A4tje zijn duidelijk congruent: ze hebben allebei een zijde van lengte 1, en dezelfde hoeken. We geven dat aan in de figuur:



Enerzijds is gegeven dat $y = -x + \sqrt{2}$, en anderzijds volgt uit de Stelling van Pythagoras dat $y^2 = x^2 + 1$. Als we de eerste betrekking invullen in de tweede vinden we $x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = y^2 = x^2 + 1$, dus $2x\sqrt{2} = 1$, dus $x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. De hoogte van de driehoek is dus $\frac{1}{4}$ van de hoogte van de rechthoek, en de twee driehoeken boven en onder vullen $\frac{1}{4}$ van de oppervlakte van de rechthoek. Er wordt dus $\frac{3}{4}$ bedekt.

3

Omdat het aantal paardzetten afhangt van de uitgangspositie van het paard, kun je de uitgangsposities in vijf klassen indelen. Zie onderstaande figuur:

8	A	B	C	C	C	C	B	A
7	B	C	D	D	D	D	C	B
6	C	D	E	E	E	E	D	C
5	C	D	E	E	E	E	D	C
4	C	D	E	E	E	E	D	C
3	C	D	E	E	E	E	D	C
2	B	C	D	D	D	D	C	B
1	A	B	C	C	C	C	B	A
	a	b	c	d	e	f	g	h

Er zijn 2 zetten mogelijk vanuit een positie van type A, 3 vanuit een positie van type B, 4 vanuit type C, 6 vanuit type D en 8 vanuit type E.

Er zijn dus in totaal $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8 = 336$ zetten mogelijk.

4

De lengte van DF is gelijk aan die van AE , de lengte van IH is gelijk aan die van EJ en de lengte van ML is gelijk aan die van JK enzovoorts. De totale lengte van de rechterzijden van de grijze driehoeken is gelijk aan de lengte van AC , namelijk 8 cm.

Evenzo is de totale lengte van de linkerzijden gelijk aan de lengte van BC , namelijk 13 cm.

Tenslotte is de totale lengte van de bovenzijden gelijk aan de lengte van AB , dus 12 cm.

De totale omtrek van de grijze driehoeken is dus gelijk aan de omtrek van driehoek ABC , namelijk 33 cm.

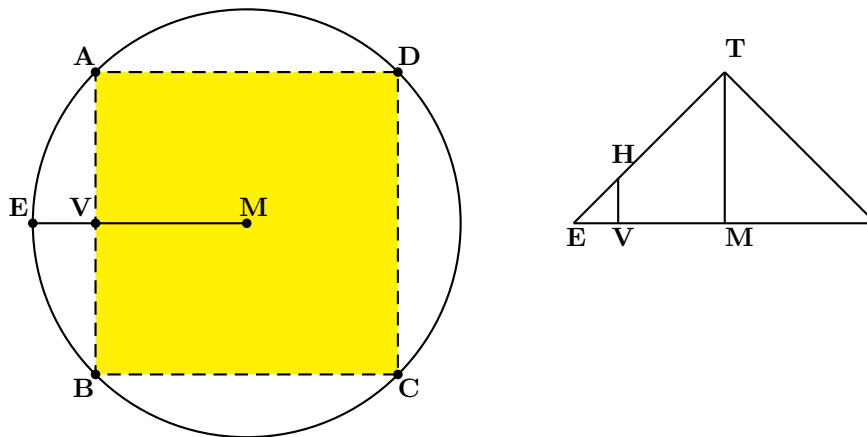
5

De som van de getallen bij de middens van de bogen is steeds het dubbele van de som van de getallen bij de eindpunten. Elk eindpunt wordt immers twee keer gebruikt. Een keer uitvoeren van het proces verdrievoudigt de som dus. Zo is bijvoorbeeld $5 + 3 + 5 + 7 = 20$ het dubbele van $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, en $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 3 + 5 + 7 = 30$. We moeten het proces drie keer uitvoeren om 32 getallen te krijgen. De som is daarna $3^3 \cdot 10 = 270$.

6

De eerste figuur hieronder geeft een bovenaanzicht van de kegel. Hier is M het middelpunt van de cirkel, en V het voetpunt van de loodlijn vanuit M op AB . Het is duidelijk dat de lengte van MV gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, aangezien de lengte van MA gelijk is aan 1.

De tweede figuur is een zijaanzicht. Hier is het lijnstukje VH het zijaanzicht van de hyperbool, met H als hoogste punt. Het is duidelijk dat de lengte van VH gelijk is aan die van EV , en dat is het verschil van de lengtes van EM en VM , namelijk van 1 en $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.



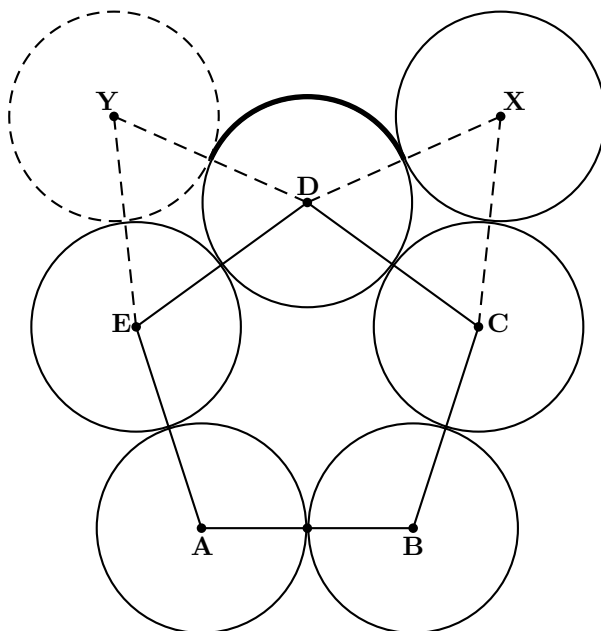
7

De som van vier opeenvolgende getallen beginnend met m is $m + (m+1) + (m+2) + (m+3) = 4m + 6$. De som van vijf opeenvolgende getallen beginnend met n is $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10$. We zoeken dus natuurlijke getallen m en n met $4m = 5n + 4$.

Hieruit blijkt dat $5n$ en dus n een viervoud is: er is een natuurlijk getal k met $n = 4k$, en dan is $m = 5k + 1$. De sommen zijn dan allebei $20k + 10$. De gegeven rijtjes komen overeen met $k = 1$. Het volgende rijtje heeft $k = 2$ en de sommen zijn dan 50.

8

We geven namen aan de middelpunten van de vijf vaste viltjes, en aan de middelpunt van het losse viltje in zijn beginstand, en ook nadat hij zover gerold is dat hij het volgende viltje raakt:

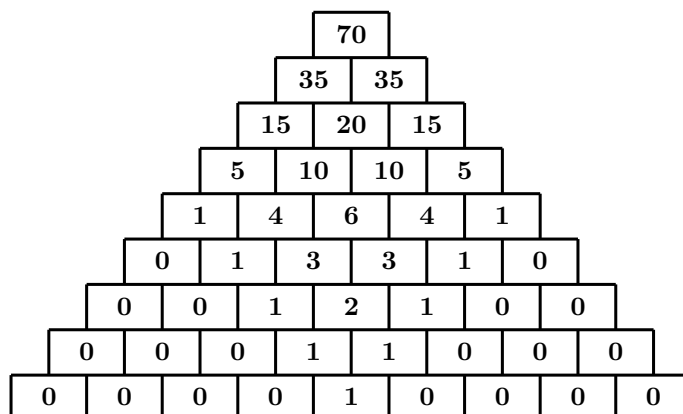


De hoeken van een regelmatige vijfhoek zijn allemaal 108° . Dus is $\angle EDC = 108^\circ$. Omdat driehoek CDX gelijkzijdig is, is $\angle CDX = 60^\circ$. Net zo is $\angle YDE = 60^\circ$. Daaruit volgt dat $\angle XDY = 132^\circ$.

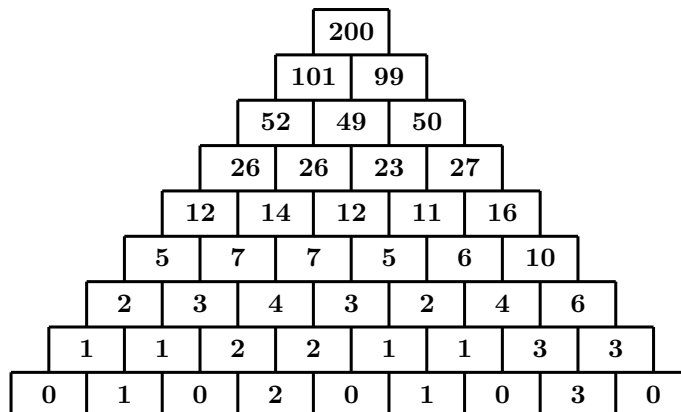
Dit is precies de hoek waarover het losse viltje rolt om vanuit positie X in positie Y te geraken. Het gedeelte van de cirkel om D waarmee contact gemaakt wordt is in de figuur dik aangegeven. Om helemaal om de vijf viltjes heen te rollen moeten we vijf maal een dergelijke hoek afleggen.

9

Het volgende diagram geeft het aantal factoren 5 op elke plek:



en het volgende diagram geeft het aantal factoren 2 op elke plek:



We zien dat er 70 factoren 5 in z voorkomen, en minstens zoveel factoren 2.

10

Schrijf p_0 voor het totaal aantal prijzen, m_0 voor het aantal in prijzen per mand in de eerste verdeelronde, enzovoorts. Dan moet gelden:

$$p_0 = 3m_0 + 1,$$

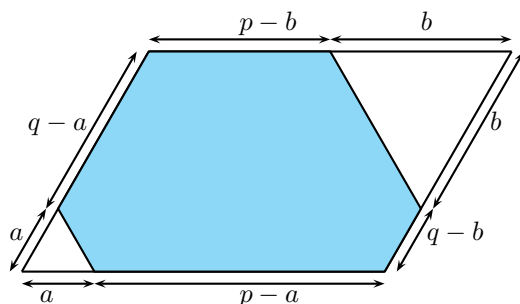
$$p_1 = p_0 - m_0 - 1 = 3m_1 + 1$$

$$p_2 = p_1 - m_1 - 1 = 3m_2 + 1$$

Daaruit volgt dat $2m_1 = 3m_2 + 1$ en $2m_0 = 3m_1 + 1$ dus $m_0 = \frac{9}{4}m_2 + \frac{5}{4}$. Omdat m_0 geheel is moet er een natuurlijk getal k zijn met $m_2 = 4k + 3$. In dat geval is $m_0 = 9k + 8$ en $p_0 = 27k + 25$, Het kleinste getal > 111 van die vorm is 133, en dat gebeurt voor $k = 4$. Het winnende team krijgt dan $m_0 = 44$ prijzen.

11

Start met een convexe zeshoek met 111 driehoekjes. Van de drie stellen overstaande zijden is er een waarvan de som van de lengtes minimaal is. Noem die lengtes a en b , waarbij $1 \leq a \leq b$. Door op genoemde overstaande zijden gelijkzijdige driehoeken te plaatsen ontstaat een parallellogram met zijden p en q , zoals aangegeven in onderstaande figuur. De afspraak over de betekenis van a en b houdt in dat $a + b \leq (p - a) + (p - b)$ en $a + b \leq (q - a) + (q - b)$. Dit betekent dat $a + b \leq p$ en $a + b \leq q$.



Het totaal aantal driehoekjes in het parallellogram is $111 + a^2 + b^2$, en het is ook $2pq$. We hebben net gezien dat $2pq \geq 2(a + b)^2$. Hieruit volgt dat $111 + a^2 + b^2 \geq 2(a + b)^2$. Met wat herschrijven geeft dat $111 \geq a^2 + b^2 + 4ab$.

- Hieruit volgt dat $111 \geq 6a^2$, dus $a \leq 4$.
- Hieruit volgt ook dat $111 \geq 1 + b^2 + 4b$ dus $(b + 2)^2 \leq 114$ dus $b \leq 8$.
- Verder volgt uit $111 + a^2 + b^2 = 2pq$ dat a en b een oneven verschil hebben.
- We hadden eerder afgesproken dat $1 \leq a \leq b$ en dat $a^2 + b^2 + 4ab \leq 111$.

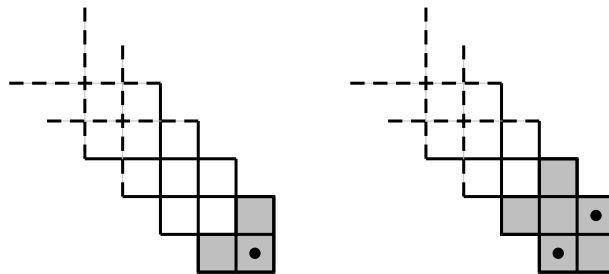
Er zijn maar 8 stellen (a, b) die aan deze vier eisen voldoen. Voor elk daarvan moeten we $(111 + a^2 + b^2)/2$ proberen te schrijven als een product pq van twee factoren p en q die $\geq a + b$ zijn.

a	b	$a + b$	pq	p, q
1	2	3	58	-
1	4	5	64	8, 8
1	6	7	74	-
1	8	9	88	-
2	3	5	62	-
2	5	7	70	7, 10
2	7	9	82	-
3	4	7	68	-

We zien dat er maar twee mogelijkheden zijn. De omtrek $(p - a) + (q - b) + b + (p - b) + (q - a) + a = 2(p + q) - (a + b)$ is in het eerste geval $2(8 + 8) - 5 = 27$ en in het tweede geval $2(7 + 10) - 7 = 27$.

12

We vragen ons af op hoeveel manieren de cameras te plaatsen zijn voor een $n \times n$ plattegrond van hetzelfde type. Noem dat aantal $F(n)$.



In de laatste rij moet een camera staan. Dat kan in de laatste kolom, zoals de linker figuur aangeeft, of in de voorlaatste kolom, zoals de rechter figuur aangeeft.

In het eerste geval moeten er $n - 1$ cameras over een $(n - 1) \times (n - 1)$ plattegrond van

dezelfde soort verdeeld worden. Dat kan op $F(n - 1)$ manieren.

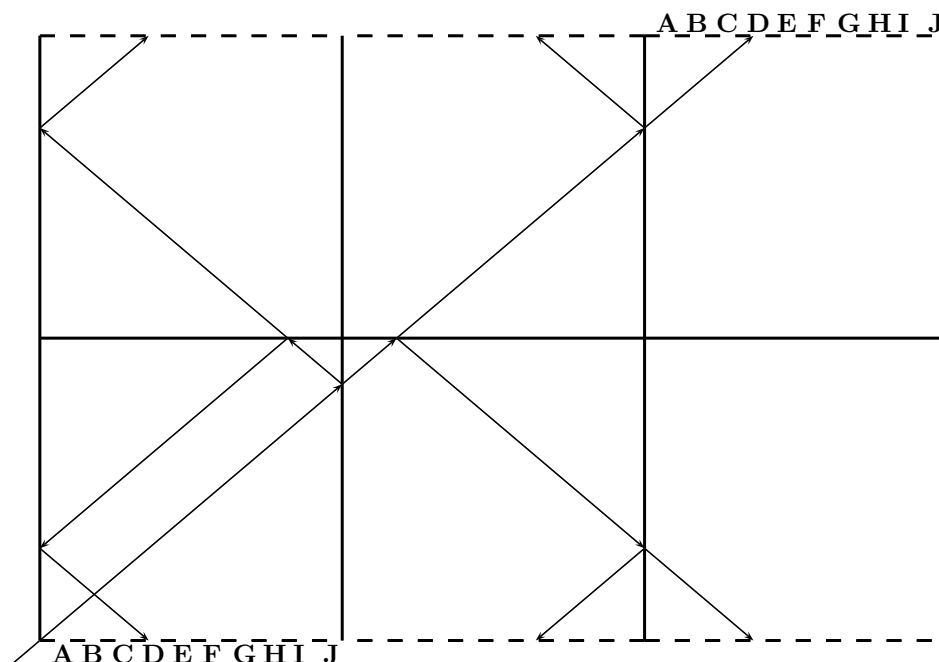
In het tweede geval kan de plek rechtsonder alleen bewaakt worden door een camera in de laatste kolom en voorlaatste rij. Er moeten dan nog $n - 2$ cameras over een $(n - 2) \times (n - 2)$ plattegrond van dezelfde soort verdeeld worden. Dat kan op $F(n - 2)$ manieren.

Uit bovenstaande redenering blijkt dat $F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$. De figuren in de opgave zelf illustreren dat $F(5) = F(4) + F(3) = 5 + 3 = 8$.

De volgende waarden zijn $F(6) = F(5) + F(4) = 8 + 5 = 13$, $F(7) = F(6) + F(5) = 13 + 8 = 21$, en $F(8) = F(7) + F(6) = 21 + 13 = 34$.

13

In plaats van de lichtstraal te spiegelen is het gemakkelijker hem rechtdoor te laten gaan, en het kabinet aan te vullen met zijn spiegelbeelden, zoals aangegeven in de volgende tekening:



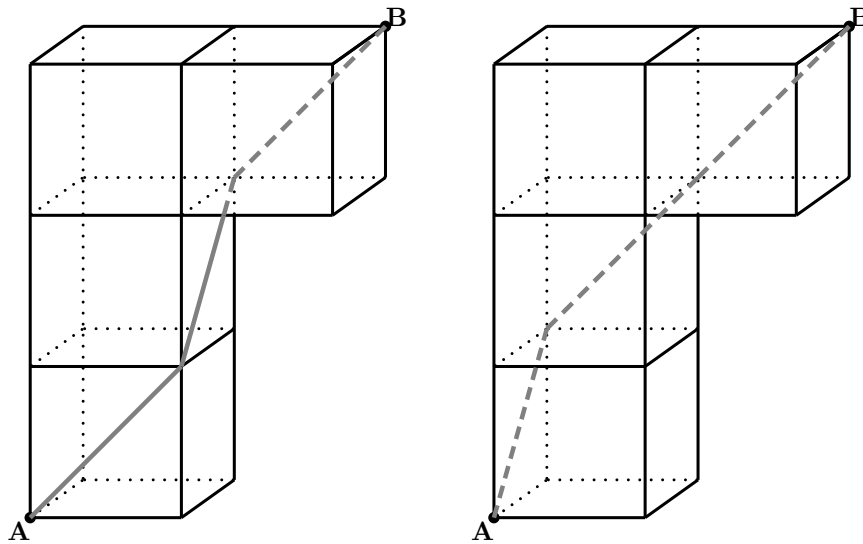
De rechtdoorgaande lichtstraal heeft vergelijking $y = \frac{50}{59}x$, en het gaat erom wanneer y gelijk is aan 2 keer 10 meter. Dat is het geval voor x gelijk aan $\frac{59}{50} \times 20 = 23.6$ meter, wat in het ongespiegelde kabinet overeenkomt met 3.6 meter voorbij de hoek bij A. Omdat dit tussen 3.5 en 4 meter ligt, komt dat overeen met opening D.

14

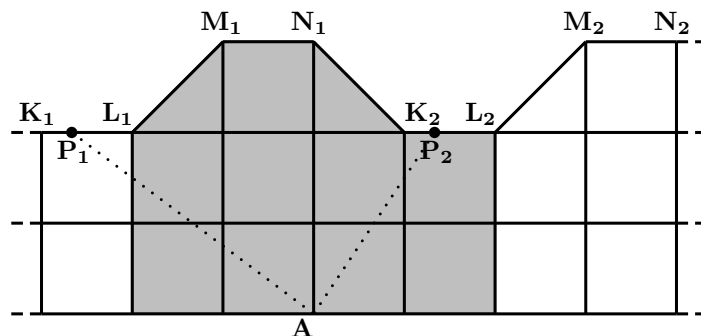
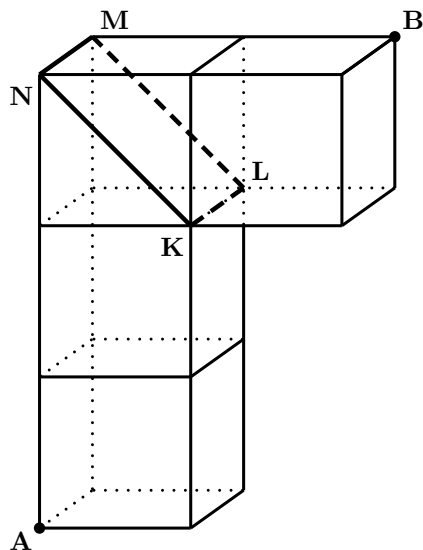
Omdat x groter dan 1 is, ligt $1/x$ tussen 0 en 1. Omdat x tussen 10 en 11 ligt is $x - 10$ het getal tussen 0 en 1 met dezelfde decimale ontwikkeling. De eis is dus $1/x = x - 10$. Daaruit volgt dat $x^2 - 10x - 1 = 0$. Met de abc-formule vinden we nu de twee oplossingen $5 \pm \sqrt{26}$, waarvan $5 - \sqrt{26}$ negatief is, en $5 + \sqrt{26}$ inderdaad tussen 10 en 11 ligt.

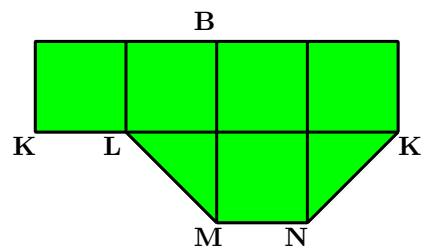
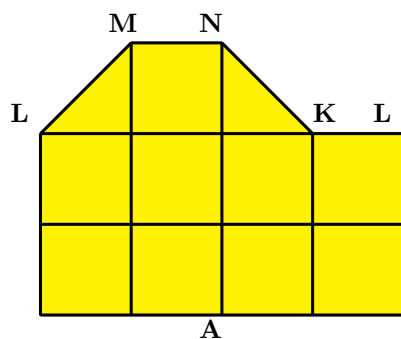
15

In onderstaande figuur zijn twee routes van A naar B getekend van lengte $3\sqrt{2}$. We gaan aantonen dat er geen kortere route is. Elke route van A naar B passeert het vlak $KLMN$. Dat vlak verdeelt de figuur in twee stukken; van beide bekijken we een uitslag. Voorlopig verwaarlozen we gemakshalve het ondervlak en het uiterste rechtervlak van het voorwerp. Noem het punt waar de route $KLMN$ treft P . We onderscheiden vier gevallen, namelijk dat P ligt op KL , LM , MN of NK .

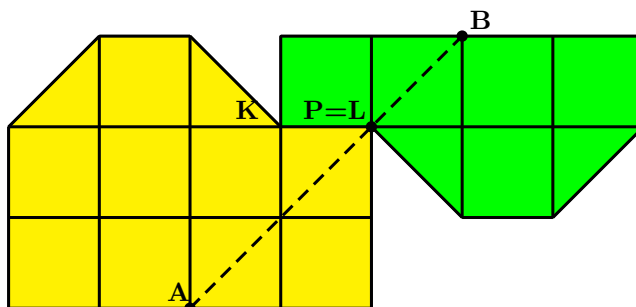
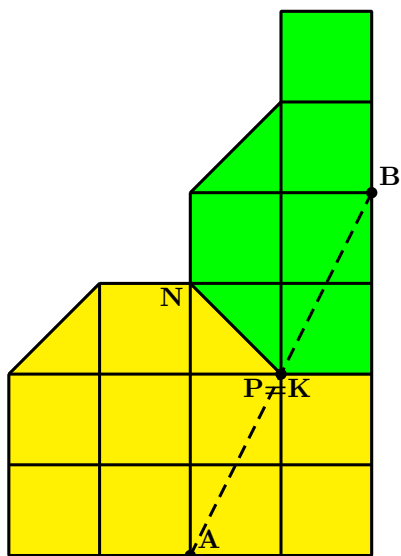
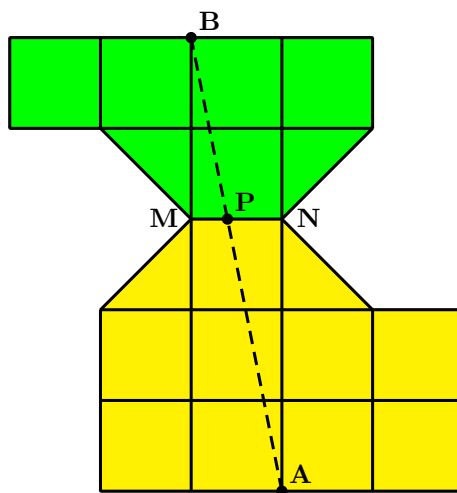
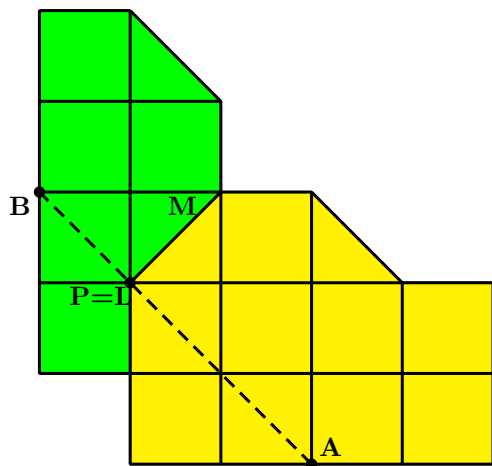


De punten K_1 en K_2 in de uitslag hieronder corresponderen allebei met het punt K . Analoo L_1 en L_2 met L enzovoorts. Het is snel duidelijk dat we alleen hoeven te kijken naar de gevallen dat P op K_1L_1 , L_1M_1 , M_1N_1 of N_1K_1 ligt. Hieronder staan de relevante delen van de uitslagen.





In elk van de vier gevallen is de kortste verbinding van A naar B een rechte lijn over de uitslagen.



De lengte van de routes zijn achtereenvolgens $\sqrt{18}$, $\sqrt{26}$, $\sqrt{20}$ en $\sqrt{18}$. Inderdaad is $\sqrt{18}$ de kleinste waarde.

We beschouwen nu nog even routes die het ondervlak van het voorwerp gebruiken. Deze kunnen beschreven worden door nog een vierkant vast te plakken aan de uitslag van het onderste deel. Het is duidelijk dat de lengte van elke route van A naar een punt P van $KLMN$ minstens lengte $3 > 2\sqrt{2}$ heeft. Omdat de route van P naar B minstens lengte $\sqrt{2}$ heeft is de lengte van een dergelijk route van A naar B groter dan $3\sqrt{2}$, dus niet minimaal. Het uitsluiten van routes die het uiterste rechtervlak gebruiken vergt iets meer werk.

16

De oplossing berust op het bestuderen van de verhouding van de snelheden. Daarvoor moeten we alleen de zuivere vaartijd rekenen. De wachttijd aan de kade moeten we niet meerekenen; we moeten de klok dan zagezegd stilzetten.

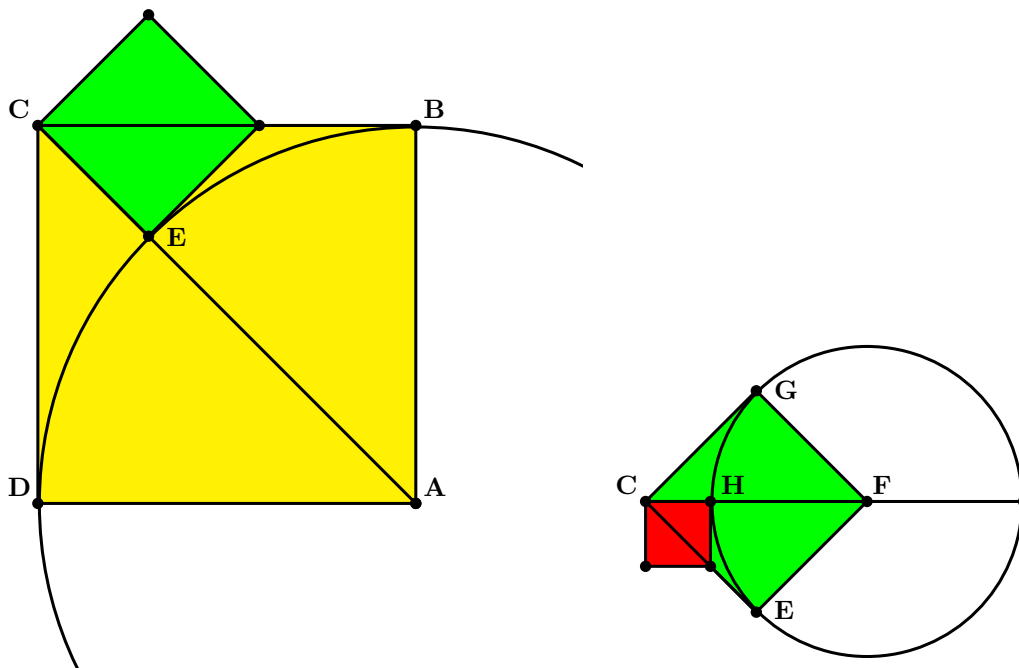
Schrijf b voor de breedte van de rivier in meters. Op het moment van de eerste ontmoeting heeft de eerste boot $b - 155$ meter afgelegd en de tweede boot 155 meter. De verhouding van de snelheden is dus $\frac{b-155}{155}$. Op het moment van de tweede ontmoeting heeft de eerste boot $2b - 85$ meter afgelegd en de tweede boot $b + 85$ meter. De verhouding van de snelheden is dus $\frac{2b-85}{b+85}$. Gelijk stellen van die verhoudingen levert de vergelijking

$$(b - 155) \cdot (b + 85) = 155 \cdot (2b - 85) \quad \text{ofwel} \quad b^2 - 380b = 0$$

En omdat b niet nul is moet hij 380 bedragen.

17

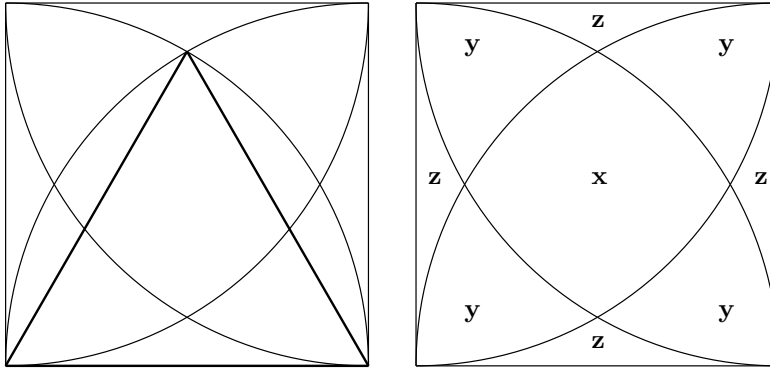
Niet alleen de zijden AB en AD maar ook lijnstuk AE heeft lengte 1. Maar volgens Pythagoras heeft lijnstuk AC lengte $\sqrt{2}$. Dus de lengte van CE bedraagt $-1 + \sqrt{2}$.



Evenzo hebben niet alleen FE en FG maar ook FH lengte $-1 + \sqrt{2}$. Volgens Pythagoras heeft FC lengte $\sqrt{2} \cdot (-1 + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$. Dus de lengte van CH bedraagt $3 - 2\sqrt{2}$. De oppervlakte van het donkere vierkantje is dus $(3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}$.

18

Het bovenste van de vier snijpunten heeft afstand 1 tot beide onderste hoekpunten, en vormt daarmee dus een gelijkzijdige driehoek. Zie de eerste figuur hieronder.



De hoogte van deze driehoek is $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en de oppervlakte dus $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. Vervangen we de linkerzijde door de boog met dezelfde eindpunten dan is de omsloten figuur een zesde deel van een cirkelschijf, met oppervlakte $\frac{1}{6}\pi$. Vervangen we ook de rechterzijde door een boog, dan wordt de oppervlakte nog eens met $\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ vergroot, en wordt dus $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

We vinden zo de volgende betrekkingen:

$$x + 2y + z = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad x + 3y + 2z = \frac{1}{4}\pi \quad x + 4y + 4z = 1$$

Trekken we de eerste betrekking van de tweede en de derde af dan vinden we:

$$y + z = -\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad 2y + 3z = 1 - \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Nog eens aftrekken levert $z = 1 - \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ en dus $y = -1 + \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $x = 1 + \frac{1}{3}\pi - \sqrt{3}$.

19

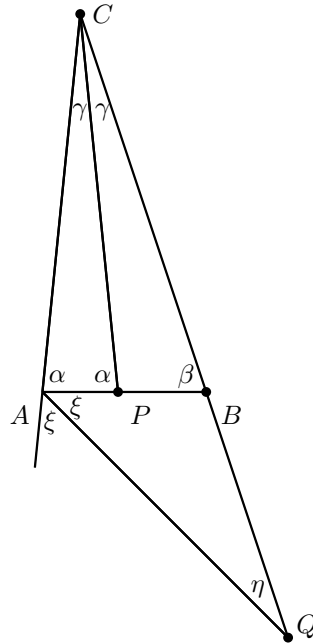
We maken een schema. We noemen de negen beweringen A1, A2, B1, B2, C1, C2, D1, D2 en E. Voor een bewering Xn betekent XnJ dat hij waar is, en XnN dat hij niet waar is. Er zijn nu de volgende mogelijkheden:

EJ	D1N,D2J	C1J,C2J	B1N,B2J B1J,B2N	A1J,A2J A1N A2N
	D1J,D2N	C1J,C2N	B1N B2N	
		C1N,C2J	B1J,B2J	A1N A2N
EN	D1J,D2J	C1J,C2N	B1N B2N	
		C1N,C2J	B1J,B2J	A1N A2N

We zien dat elke regel behalve de eerste meer dan twee onware uitspraken bevat. Dus zijn alleen $B1$ en $D1$ onwaar; in het bijzonder heeft het alle vijf dagen geregend.

20

Uit de gelijkbenigheid van $\triangle ACP$ volgt dat $\angle PAC = \angle CPA$; we hebben beide hoeken in onderstaande figuur met α aangegeven. Verder hebben we $\angle CBA$ met β aangegeven, $\angle QAB$ met ξ , $\angle BQA$ met η , en zowel $\angle BCP$ als $\angle PCA$ met γ .



We lezen dan de volgende relaties af:

$$\begin{aligned}2\alpha + \gamma &= \pi \\ \alpha + 2\gamma + \beta &= \pi \\ \eta &= 2\gamma \\ \beta &= \xi + \eta \\ \alpha + 2\xi &= \pi\end{aligned}$$

Als we η elimineren door de derde relatie te gebruiken wordt dit

$$\begin{aligned}2\alpha + \gamma &= \pi \\ \alpha + 2\gamma + \beta &= \pi \\ \beta &= \xi + 2\gamma \\ \alpha + 2\xi &= \pi\end{aligned}$$

Als we vervolgens β elimineren door de derde relatie te gebruiken wordt dit

$$\begin{aligned}2\alpha + \gamma &= \pi \\ \alpha + 4\gamma + \xi &= \pi \\ \alpha + 2\xi &= \pi\end{aligned}$$

Als we vervolgens ξ elimineren door de tweede relatie in de derde in te vullen wordt dit

$$\begin{aligned}2\alpha + \gamma &= \pi \\ \alpha + 8\gamma &= \pi\end{aligned}$$

Als we vervolgens γ elimineren door de eerste relatie in de tweede in te vullen wordt dit

$$15\alpha = 7\pi$$

We zien dat $\alpha = \frac{7}{15}\pi$, $\beta = \frac{6}{15}\pi$, $\gamma = \frac{1}{15}\pi$, $\xi = \frac{4}{15}\pi$, $\eta = \frac{2}{15}\pi$.
In graden: $\alpha = 84^\circ$, $\beta = 72^\circ$, $\gamma = 12^\circ$, $\xi = 48^\circ$, $\eta = 24^\circ$.