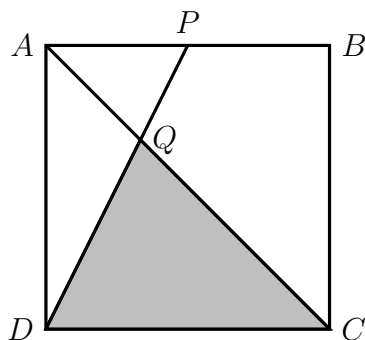


Opgave NL1 (20 punten, 2x)

In een vierkant $ABCD$ met zijden van lengte 1 verbinden we het hoekpunt D met het punt P midden op de zijde AB . We noteren het snijpunt van het lijnstuk DP met de diagonaal AC met Q .



Wat is de oppervlakte van de driehoek DQC ?

1/3

Uitwerking opgave NL1

Zij X het middelpunt van het vierkant, en Y het middelpunt van XB . Dan is

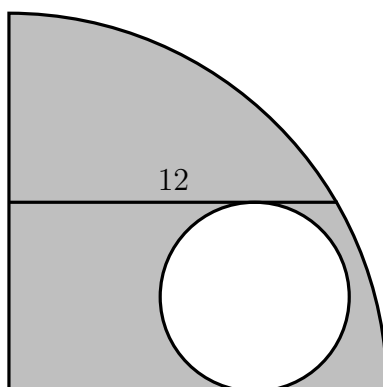
$$\frac{2 \cdot QX}{\sqrt{2}} = \frac{QX}{XD} = \frac{PY}{YD} = \frac{1}{3}.$$

Dus $QX = \sqrt{2}/6$. De oppervlakte van de driehoek DQX is dus $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{12}$. De oppervlakte van DQC is dus $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.

1/3

Opgave NL2 (30 punten, 3x)

In de onderstaande figuur zie je een kwartschijf met daarin een kleinere schijf. De kleinere schijf raakt aan een rechte zijde van de kwartschijf en aan het getekende evenwijdige lijnstuk met lengte 12.



Wat is de oppervlakte van het deel van de kwartschijf dat buiten de kleinere schijf ligt?

36π

Uitwerking opgave NL2

Noem R de straal van de kwart cirkel, en r de straal van de kleine cirkel. Vanwege Pythagoras is dan $R^2 = 12^2 + (2r)^2$, dus

$$R^2/4 - r^2 = 36.$$

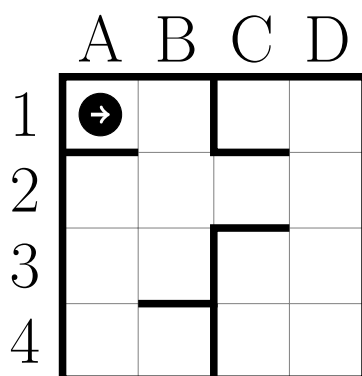
Dus de gezochte oppervlakte is

$$\pi R^2/4 - \pi r^2 = 36\pi.$$

36π

Opgave B09 (20 punten, 2x)

In onderstaand doolhof bevindt een robot zich op locatie A1 en kijkt naar rechts.



Elke dikke zwarte lijn stelt een muur voor waar de robot niet doorheen kan. Per minuut voert de robot één van de volgende bewegingen uit:

- als de robot zich kan verplaatsen in de richting waarin hij kijkt, dan verplaatst hij zich één vakje in die richting;
- als de robot zich niet in die richting kan verplaatsen, dan draait hij ter plaatse een kwartslag in wijzerzin (met de klok mee).

Op welke locatie bevindt de robot zich na 2023 minuten?

D4

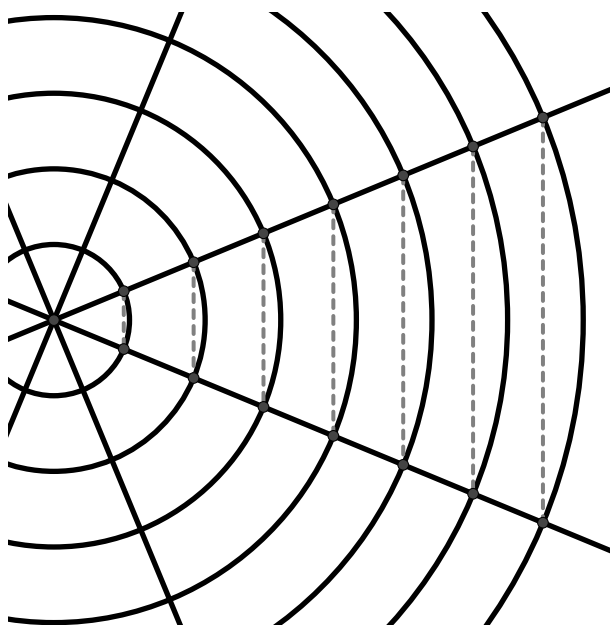
Uitwerking opgave B09

Na 15 minuten staat de robot in D4 en kijkt naar onder. We komen dan in een loop terecht (modulo 8). Omdat $2023 - 15 = 2008$ deelbaar is door 8 staat de robot na 2023 minuten opnieuw in D4 (en kijkt hij naar onder).

D4

Opgave D1 (30 punten, 3x)

Beschouw zeven concentrische cirkels met stralen $a, 2a, \dots, 6a, 7a$, waarbij $a = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Vanuit het middelpunt vertrekken acht halfrechten zodat twee aangrenzende halfrechten telkens dezelfde hoek met elkaar maken. Door de snijpunten van zo'n paar aangrenzende halfrechten met elk van de cirkels te verbinden, ontstaan zeven koorden.



Welk natuurlijk getal is het kwadraat van de som van de lengtes van deze zeven koorden?

1568

Uitwerking opgave D1

De rechten snijden elkaar in een hoek van 45 graden. Bekijk de cirkel met straal ka , dan zien we een gelijkbenige driehoek (met lengte ka) waarbij het hoekpunt in de top een hoek maakt van 45 graden. De basishoeken zijn 67.5 graden. De koorde op de cirkel

komt overeen met de basis van de driehoek, noem deze x . Dan is

$$\begin{aligned}
 x &= 2ka \cos(67.5^\circ) \\
 &= 2ka \sqrt{\frac{1 + \cos(135^\circ)}{2}} \\
 &= 2ka \sqrt{\frac{1 - \cos(45^\circ)}{2}} \\
 &= 2k \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \\
 &= k\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

De som van de koordes is dus

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)\sqrt{2} = 28\sqrt{2}.$$

Het kwadraat is $784 \cdot 2 = 1568$.

1568

Opgave D6 (20 punten, 2x)

Stel je een rekentoestel voor zoals in onderstaande figuur.

()	%	AC
7	8	9	÷
4	5	6	×
1	2	3	−
0	.	=	+

Het getal 5 034 927 618 kan op de volgende manier gevormd worden.

- Je kan van elk cijfer naar het volgende cijfer gaan door een paardensprong uit te voeren op het rekentoestel (dat wil zeggen: je gaat eerst twee stappen in horizontale richting en daarna één stap in verticale richting, of eerst twee stappen in verticale richting en dan één stap in horizontale richting).
- Je bent elk van de tien cijfers op het rekentoestel precies één keer tegengekomen.
- Onderweg ben je niet op een toets zonder cijfer of buiten het rekentoestel beland.

Er zijn niet zo veel tiencijferige natuurlijke getallen die op deze manier kunnen gevormd worden.

Was is de som van al deze getallen?

23 168 007 522

Uitwerking opgave D6

Het cijfer 5 kan enkel verbonden worden met 0. Dat betekent dat alle mogelijke getallen starten of eindigen met 5. Stel we starten met 5, dan moeten we vervolgens naar 0 en dan naar 3. Dan hebben we 2 mogelijkheden, namelijk 4 en 8 die elk een uniek getal opleveren. We vinden dus de getallen 5034927618 en 5038167294. De andere mogelijkheden zijn bijgevolg 8167294305 en 4927618305. De som van deze 4 cijfers is 23168007522

23 168 007 522

Opgave B01 (30 punten, 2x)

Hoeveel koppels gehele getallen (a, b) bestaan er zodat

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2023} ?$$

Merk op dat bij een koppel de volgorde een rol speelt: $(2023, 0)$ en $(0, 2023)$ zijn alvast twee verschillende oplossingen.

18

Uitwerking opgave B01

We kunnen de vergelijking herschrijven als $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 17\sqrt{7}$. Een rechtstreekse berekening levert

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{b} &= 17\sqrt{7} \\ \Rightarrow \sqrt{a} &= 17\sqrt{7} - \sqrt{b} \\ \Rightarrow a &= 7 \cdot 17^2 + b - 2 \cdot 17\sqrt{7}\sqrt{b} \\ \Rightarrow 2 \cdot 17\sqrt{7}\sqrt{b} &= 7 \cdot 17^2 + b - a \\ \Rightarrow 2^2 \cdot 17^2 \cdot 7b &= (7 \cdot 17^2 + b - a)^2.\end{aligned}$$

Omdat in het rechterlid van de laatste gelijkheid een volkomen kwadraat staat, moet het linkerlid ook een volkomen kwadraat zijn. Bijgevolg is b van de vorm

$$b = 7k^2 \tag{1}$$

voor een geheel getal k , waarvan we bovendien mogen veronderstellen dat $k \geq 0$. Als we dit invullen in de opgave, krijgen we $\sqrt{a} + k\sqrt{7} = 17\sqrt{7}$, of nog, $\sqrt{a} = (17 - k)\sqrt{7}$. Dit betekent dat $k \leq 17$ en

$$a = 7(17 - k)^2. \tag{2}$$

Alle oplossingen worden dus geparametriseerd door (1) en (2), waarbij $k \in \{0, 1, \dots, 16, 17\}$.

18

Opgave D4 (20 punten, 2x)

Het product van de cijfers van een getal noemen we het *cijferproduct* van dat getal. Zo is het cijferproduct van 238 gelijk aan 48 aangezien $2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$. Het cijferproduct van 48 is 32 en dat van 32 is 6.

Als we het cijferproduct van een willekeurig natuurlijk getal herhaaldelijk berekenen, dan vinden we een rij van steeds kleiner wordende getallen tot we uiteindelijk bij een getal van één cijfer uitkomen, dat natuurlijk zijn eigen cijferproduct is. We noemen het aantal stappen tot het ééncijferige getal de *persistentie* van het getal waarvan we vertrokken.

Hierboven zagen we bijvoorbeeld dat 238 persistentie drie heeft omdat we na drie stappen een ééncijferig getal vonden ($238 \rightarrow 48 \rightarrow 32 \rightarrow 6$).

Wat is het kleinste natuurlijk getal met persistentie vier?

77

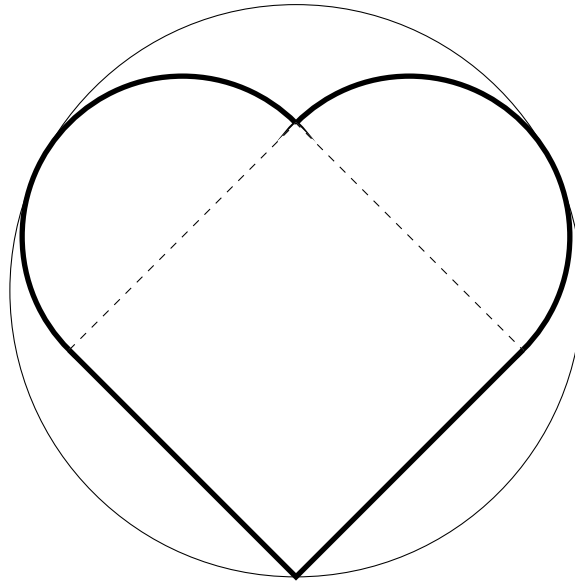
Uitwerking opgave D4

25 is het kleinste getal met persistentie 2. Daarom moeten alle getallen met persistentie 3 minstens een cijferproduct hebben van 25. Het kleinste getal met deze eigenschap is 39. Het kleinste getal met persistentie 4 moet dus minstens een cijferproduct hebben van 39. De mogelijke getallen hiervoor zijn 58, 59, 67, 68, 69, 76, 77 Korte berekeningen geven dat de persistenties van 58, 59, 67, 68, 69, 76 steeds 3 zijn, maar voor 77 is dit 4. Namelijk $77 \rightarrow 49 \rightarrow 36 \rightarrow 18 \rightarrow 8$. Het antwoord is dus 77.

77

Opgave B08 (30 punten, 3x)

We maken een hartje door op twee aan elkaar grenzende zijden van een vierkant halve cirkels te plaatsen, met die zijden als middellijnen. Deze gaan dus door drie van de vier hoekpunten van het vierkant. Vervolgens tekenen we de omgeschreven cirkel van het hartje die de twee halve cirkels raakt en door het vierde hoekpunt van het vierkant gaat.



Veronderstel dat in het oorspronkelijke vierkant de zijde lengte 7 heeft.

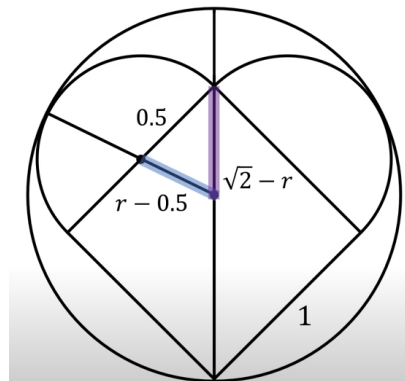
Wat is de straal van de omgeschreven cirkel?

Geef je antwoord in de vorm $a + b\sqrt{2}$ met a en b gehele getallen.

$$2 + 3\sqrt{2}$$

Uitwerking opgave B08

Met enkele hulplijnen vinden we volgende gegevens.



In deze figuur heeft het vierkant zijde lengte 1. We gebruiken nu de cosinuswet. Deze geeft

$$(r - 0.5)^2 = 0.5^2 + (\sqrt{2} - r)^2 - 2 \cdot 0.5 \cdot (\sqrt{2} - r) \cdot \cos(\pi/4).$$

Dit uitwerken geeft $r = \frac{2}{3\sqrt{2}-2} = \frac{3\sqrt{2}+2}{7}$.

Als het vierkant zijde 7 heeft, dan wordt de oplossing dus $2 + 3\sqrt{2}$.

$$2 + 3\sqrt{2}$$

Opgave NL4 (20 punten, 3x)

Alice en Bob gooien een eerlijke munt die met 50% kans op kop valt en met 50% kans op munt. Ze spelen het volgende spel: ze gooien de munt net zolang totdat ofwel driemaal kop achter elkaar is gegooid, ofwel munt gevolgd door tweemaal kop. Als driemaal kop als eerste voorkomt, dan wint Alice. Bij munt kop kop wint Bob.

Wat is de kans dat Alice het spel wint?

1/8 OF 0.125 OF 12.5%

Uitwerking opgave NL4

Als er ooit munt wordt gegooid, dan kan Alice niet meer winnen. Dus Alice wint alleen als de eerste drie worpen KKK zijn, dus met kans $1/8$ want $0.5^3 = 1/8$.

1/8 OF 0.125 OF 12.5%

Opgave B06 (30 punten, 3x)

Een handelaar gebruikt een klassieke weegschaal zoals afgebeeld in onderstaande figuur om gewichten te meten. Hij wil alle gehele gewichten van 1 tot 40 kg hiermee kunnen wegen. Hiervoor zou hij 40 blokken van exact 1 kg kunnen gebruiken, maar hij wenst het aantal blokken te minimaliseren door gebruik te maken van zwaardere blokken.



Als de handelaar bijvoorbeeld één blok van 2 kg en één blok van 5 kg zou hebben, dan kan hij daarmee de gewichten 2, 3, 5 en 7 kg wegen.

Wat zijn de gewichten (in kg) voor de minimale set van de blokken?

Noteer in het antwoord de waarden van klein naar groot.

1, 3, 9, 27

Uitwerking opgave B06

Het is duidelijk dat je met de blokken van 1, 3, 9 en 27 kg alle gehele gewichten van 1 tot 40 kg kan meten. Met 1 en 3 kg kan je alles meten tot 4 kg. Dus met de volgende blok moeten we kunnen meten vanaf 5. We nemen 9 aangezien $9-4=5$. Nu kunnen we alles meten tot 13. De volgende blok is dus $2 \cdot 13 + 1 = 27$. Deze oplossing is uniek en beter kan niet.

1, 3, 9, 27

Opgave B03 (20 punten, 3x)

Wat zijn de twee laatste cijfers van het getal 11^{2023} ?

31

Uitwerking opgave B03

Merk op dat $11^{2023} = (10 + 1)^{2023}$. Deze som kunnen we uitschrijven door middel van het binomium van Newton. De meeste termen zullen veelvouden van 10 zijn en daarom geen bijdrage leveren aan de rest. Enkel de laatste 2 termen hebben een bijdrage. Deze termen zijn 2023×10 en 1. De som is 20 231 zodat de rest na deling door 100 gelijk is aan 31.

31

Opgave B05 (30 punten, 3x)

Elke zaterdag spelen Katrien en Maren tennis van 17u tot 18u. De man van Katrien vertrekt thuis met de auto om stipt om 18u bij de tennisclub aan te komen en samen terug naar huis te rijden.

Afgelopen zaterdag kwam Katrien net aan op de tennis wanneer ze zich herinnerde dat Maren niet beschikbaar was om te tennissen. Ze belde haar man die thuis was op om haar te komen halen en vertrok daarna om 17u alvast te voet huiswaarts. Een tijdje later pikte haar man haar op en reden ze het resterende stuk samen met de auto naar huis. Zo kwamen ze uiteindelijk 20 minuten vroeger dan normaal samen thuis aan en bovendien zat de man van Katrien ook 20 minuten minder lang in de auto.

Je mag ervan uit gaan dat de man van Katrien altijd even snel rijdt.

Hoeveel minuten heeft Katrien gewandeld?

50

Uitwerking opgave B05

Veronderstel dat de autorit van de tennis tot thuis x minuten duurt en dat Katrien y minuten gewandeld heeft. Dan komen ze normaal thuis om 18u plus x minuten. Afgelopen zaterdag kwamen ze thuis om 17u plus $2y$ minuten aangezien haar man tot op de oppikplaats y minuten had gereden (en Katrien y minuten had gewandeld) en vervolgens hebben ze y minuten samen terug naar huis gereden. Aangezien ze 20 minuten vroeger dan normaal thuis waren vinden we zo de vergelijking $x + 40 = 2y$.

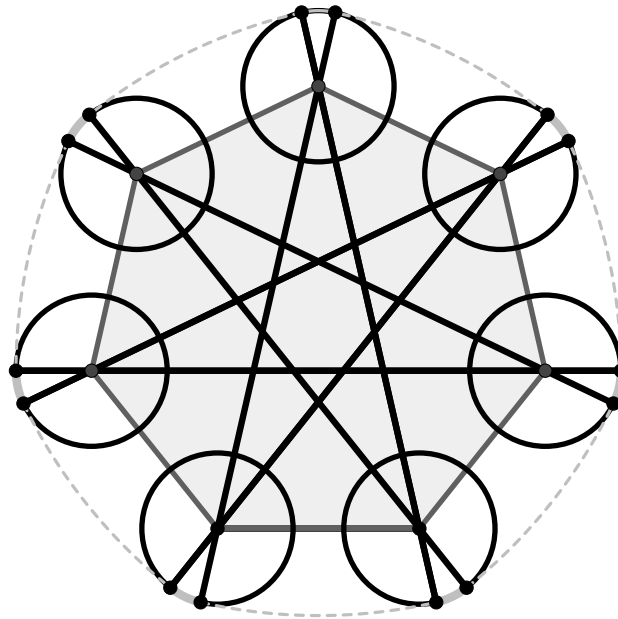
De man van Katrien zat 20 minuten minder lang in de auto, dit geeft de vergelijking $y = x - 10$.

Beide vergelijkingen oplossen geeft $y = 50$ en $x = 60$. Katrien moest dus 50 minuten wandelen.

50

Opgave D2 (20 punten, 2x)

Beschouw een regelmatige zevenhoek waarbij de langste diagonaal tussen twee hoekpunten lengte 6 heeft. In elk hoekpunt tekenen we een volledige cirkel met straal 1 alsook een stuk van de cirkel met straal 7 (de stippellijnen). De omhullende kromme van deze figuur bestaat dan uit stukjes cirkel waarvan de middelpunten de hoekpunten van de zevenhoek zijn en waarvan de stralen afwisselend 1 en 7 zijn.



Hoe lang is de omhullende kromme?

8π

Uitwerking opgave D2

De hoek tussen twee diagonalen die vertrekken vanuit een hoekpunt van de regelmatige zevenhoek is $\frac{\pi}{7}$. De omhullende cirkel is daarom de combinatie van een halve cirkel met straal 7 en een halve cirkel met straal 1. De omtrek is dus $7\pi + \pi = 8\pi$ zodat $x = 8$.

8π

Opgave B04 (30 punten, 2x)

Lars en Kristof vragen aan Anne wat haar favoriete getal is. Anne vertelt Lars wat het eerste cijfer is en Kristof wat het tweede cijfer is. Vervolgens zegt ze aan beiden dat haar favoriete getal voorkomt in de volgende lijst:

35, 36, 39, 57, 58, 74, 76, 94, 95, 97.

Lars bestudeert de lijst en zegt: “Ik weet niet wat Annes favoriete getal is en ik weet zeker dat Kristof het ook niet weet.”

Vervolgens antwoordt Kristof: “Oorspronkelijk wist ik inderdaad niet wat Annes favoriete getal is, maar nu weet ik het wel.”

Tot slot zegt Lars: “Dan weet ik het nu ook.”

Wat is het favoriete getal van Anne?

76

Uitwerking opgave B04

The fact that Alice knew for certain that Bob didn't know means that she has received a first digit for which the second digit is not unique in the list. Hence Alice's first digit could not be 3 (as 9 would be a unique second digit), nor 5 (as 8 would be a unique second digit). Hence Bob understands this and realises that Alice has received the digit 7 or 9. The fact that he says that now he knows the favourite number means that he had received a second digit that was not unique in the list, but is unique amongst those digits starting with 7 or 9, thus his second digit must have been 6, 5, or 7. Alice says that now she knows as well, meaning it must be 76, because if she had received a 9 there would still be two options.

76

Opgave B02 (20 punten, 2x)

Als x en y twee reële getallen zijn, dan noteren we met $\min\{x, y\}$ het kleinste van die twee getallen en met $\max\{x, y\}$ het grootste.

Stel nu dat het achttal (a_1, a_2, \dots, a_8) bestaat uit de getallen $1, 2, \dots, 8$ in willekeurige volgorde. Elk van de getallen komt dus precies één keer voor.

Wat zijn de mogelijke waarden van

$$\min\{\max\{\min\{a_1, a_2\}, \min\{a_3, a_4\}\}, \max\{\min\{a_5, a_6\}, \min\{a_7, a_8\}\}\} \text{ ?}$$

Noteer in het antwoord de waarden van klein naar groot.

2, 3, 4, 5

Uitwerking opgave B02

Aangezien we een minimum nemen van 2 maxima is het onmogelijk om 1 uit te komen. Ook is 8 niet mogelijk omdat we uiteindelijk een minimum nemen. Volgende uitkomsten

zijn mogelijk

$$\min\{\max\{\min\{1, 3\}, \min\{2, 4\}\}, \max\{\min\{5, 6\}, \min\{7, 8\}\}\} = 2$$

$$\min\{\max\{\min\{1, 2\}, \min\{3, 4\}\}, \max\{\min\{5, 6\}, \min\{7, 8\}\}\} = 3$$

$$\min\{\max\{\min\{1, 3\}, \min\{4, 5\}\}, \max\{\min\{2, 6\}, \min\{7, 8\}\}\} = 4$$

$$\min\{\max\{\min\{1, 2\}, \min\{5, 6\}\}, \max\{\min\{3, 4\}, \min\{7, 8\}\}\} = 5.$$

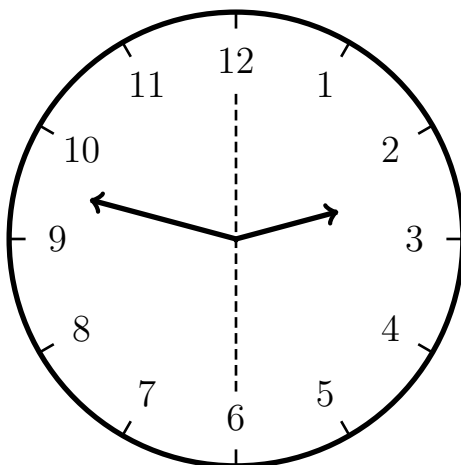
We claimen nu dat er maar 4 verschillende mogelijke uitkomsten zijn.

Stel dat we 6 uitkomen. Dan moet het eerste maximum 6 zijn en het andere 7 of 8. Dit betekent dat het getal 6 gecombineerd moet worden met 7 of 8 in het minimum over 2 elementen. Dit geeft dat 7 en 8 niet samen in een minimum geplaatst kunnen worden waardoor het tweede maximum niet 7 of 8 kan zijn. We concluderen dat 6 niet haalbaar is. Analoog vinden we dat 7 niet mogelijk is.

2, 3, 4, 5

Opgave NL3 (30 punten, 3x)

Op een moment tijdens deze Estafetteronde, dat wil zeggen ergens tussen 14u en 15u, zal de hoek tussen de twee wijzers van een analoge klok precies in twee gelijke delen gedeeld worden door een verticale rechte.



Hoeveel minuten na 14u is dat het geval?

Geef je antwoord als een onvereenvoudigbare breuk.

$\frac{600}{13}$

Uitwerking opgave NL3

Noem α_1 de hoek tussen de urenwijzer en het bovenste deel van de verticale rechte en α_2 de hoek tussen het bovenste deel van de verticale rechte en de minutenwijzer. Tussen 14u en 15u loopt α_1 van 60° naar 90° en α_2 van 360° naar 0° . Meer bepaald: om 14 uur en x minuten geldt

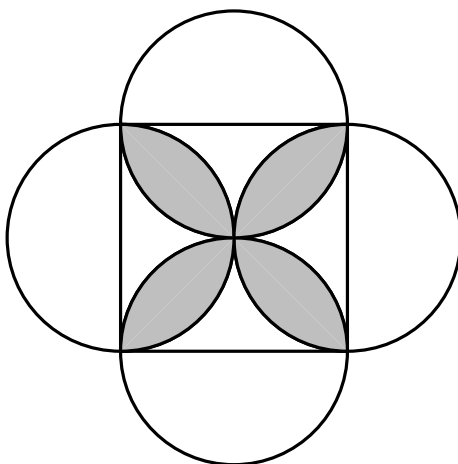
$$\alpha_1 = 60^\circ + \frac{x}{60}30^\circ, \quad \alpha_2 = 360^\circ - \frac{x}{60}360^\circ.$$

Bijgevolg moeten we de vergelijking $60 + x/2 = 360 - 6x$ oplossen. Deze heeft als oplossing $x = 600/13$.

$$\frac{600}{13}$$

Opgave B07 (20 punten, 2x)

Voor een vierkant met zijde 1 tekenen we vier schijven, die de zijden van het vierkant als middellijnen hebben. Het gebied dat hieronder donkergrijs gekleurd is, bestaat uit de punten die in minstens twee van die schijven liggen.



Wat is de oppervlakte van het grijze gebied?

$$\frac{\pi}{2} - 1 \text{ OF } \frac{\pi-2}{2}$$

Uitwerking opgave B07

Het vierkant heeft oppervlakte 1 en elke helft van een cirkel ligt in het vierkant. De helft van de oppervlakte van iedere cirkel is $\pi/8$. De 4 oppervlaktes van de cirkels in het vierkant overlappen het gevraagde gebied. De gevraagde oppervlakte is daarom $4 \cdot \pi/8 - 1 = \pi/2 - 1$.

$$\frac{\pi}{2} - 1 \text{ OF } \frac{\pi-2}{2}$$

Opgave D5 (30 punten, 2x)

We schrijven het getal 2023 op die manier omdat $2023 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. De keuze van het getal 10 is hierbij dus belangrijk en we noemen het de *basis* van ons decimaal talstelsel. Als we 2023 in het talstelsel met basis 9 schrijven, dan krijgen we $2023 = (2687)_9$ aangezien $2023 = 2 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^0$.

We definiëren een *repeenheid* in basis b als een getal waarbij de uitdrukking in basis b enkel uit enen bestaat. Zo is 31 een repeenheid in basis 5 omdat $31 = (111)_5$.

Wat is de som van alle priemgetallen die reepenheten zijn in basis 4 of in basis 9?

5

Uitwerking opgave D5

Er geldt

$$(\underbrace{11 \cdots 11}_n)_b = \sum_{i=0}^{n-1} b^i = \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

en verder is

$$\frac{4^n - 1}{3} = \frac{(2^n + 1) \cdot (2^n - 1)}{3}.$$

Voor $n > 2$ geldt dat $2^n + 1 > 2^n - 1 > 3$ zodat ofwel $2^n - 1$ ofwel $2^n + 1$ deelbaar is door 3. We vinden dus een factorisatie zodat enkel voor $n = 1$ of $n = 2$ het getal $\frac{4^n - 1}{3}$ priem kan zijn. Voor $n = 1$ vinden we 1 wat niet priem is, voor $n = 2$ vinden we het priemgetal 5.

Analoog vinden we

$$\frac{9^n - 1}{8} = \frac{(3^n + 1) \cdot (3^n - 1)}{8}.$$

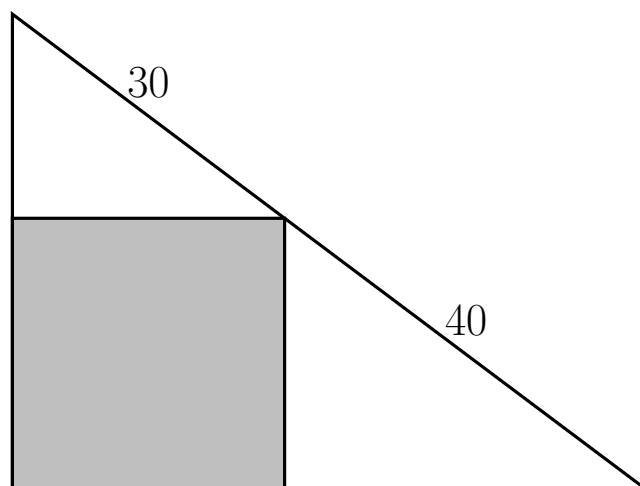
Voor $n > 2$ is $3^n + 1 > 3^n - 1 > 8$ en dus kan $\frac{9^n - 1}{8}$ enkel priem zijn voor $n = 1$ of $n = 2$. Als $n = 1$ vinden we 1, als $n = 2$ vinden we 10. Beide getallen zijn niet priem.

Er is dus maar 1 reepenheden in basis 4 die priem is, namelijk 5. In basis 9 vinden we geen reepenheden die priem zijn. De som is dus 5.

5

Opgave B10 (20 punten, 2x)

Een vierkant ligt in een rechthoekige driehoek zodat de rechthoekszijden deels samenvallen met zijden van het vierkant en de schuine zijde door een hoekpunt van het vierkant gaat. De schuine zijde wordt door het hoekpunt verdeeld in stukken van lengte 30 en 40.



Hoe lang is de zijde van het vierkant?

24

Uitwerking opgave B10

Noem y zodat de basis van de driehoek gelijk is $x + y$.

Noem z zodat de hoogte van de driehoek gelijk is aan $x + z$.

Met Pythagoras vinden we dan de 3 vergelijkingen

$$x^2 + y^2 = 40^2, \quad x^2 + z^2 = 30^2, \quad (x + y)^2 + (x + z)^2 = 70^2.$$

Verder kunnen we de oppervlakte van de driehoek bepalen door enerzijds $\frac{1}{2}(x + y) \cdot (x + z)$ en anderzijds $x^2 + \frac{1}{2}x \cdot y + \frac{1}{2}x \cdot z$. Dit geeft de vergelijking $x^2 = yz$. Deze vergelijkingen geven samen de oplossingen $y = 32$, $z = 18$ en $x = 24$.

Een alternatieve oplossing is door gebruik te maken van congruente driehoeken. Zo is

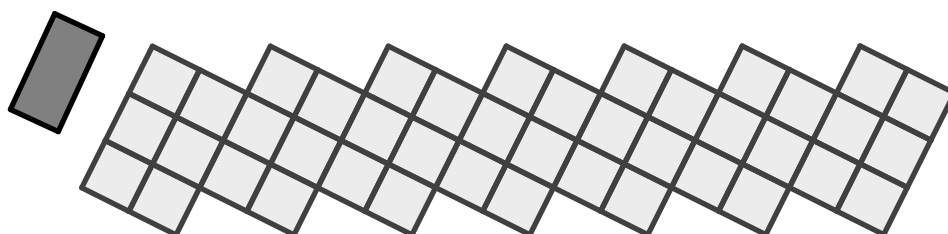
$$\frac{y}{40} = \frac{x}{30} = \frac{x + y}{70}.$$

Dit geeft $y = 32$ en $x = 24$.

24

Opgave D3 (30 punten, 3x)

Beschouw onderstaande lichtgrijze plattegrond, die bestaat uit 42 vierkantjes. We willen deze betegelen met 21 dominostenen, zoals er eentje in het donkergrijs getekend is. Eén dominosteen bedekt twee vierkantjes.



Op hoeveel unieke manieren kan je de figuur volledig met dominostenen betegelen?

3927

Uitwerking opgave D3

Noem eerst de figuur die bestaat uit 6 vierkanten en noem f_1 het aantal mogelijke betegelingen. Het is eenvoudig in te zien dat $f_1 = 3$. Beschouw vervolgens de figuur die bestaat uit 12 vierkanten. Deze kan je betegelen door eerst de eerste 6 vierkanten vol te leggen en daarna de andere 6. Dit geeft $3 \cdot 3 = 9$ mogelijkheden. Vervolgens is er ook 1 mogelijkheid waarbij we een dominosteen plaatsen die over "beide" gebieden gaat. We vinden dus dat $f_2 = 3f_1 + 1 = 10$. In het algemeen vinden we dat $f_{k+1} = 3 \cdot f_k + f_{k-1}$. Een korte berekening geeft dat $f_3 = 33$, $f_4 = 109$, $f_5 = 360$, $f_6 = 1189$ en $f_7 = 3927$.

3927