

---

---

**START WISKUNDE-ESTAFETTE RU 2004**

**Je hebt 60 minuten voor 20 opgaven.**

**Het totaal aantal te behalen punten is 500.**

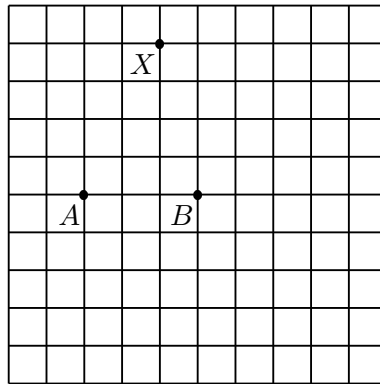
---

---

**Estafette-opgave 1 (20 punten, rest 480 punten)**

**Dubbel zover.**

We bekijken roosterpunten in een rooster van vierkantjes. De afstand tussen twee roosterpunten meten we langs roosterlijnen. Zo is de afstand  $XA$  van punt  $X$  tot  $A$  gelijk aan 6 en de afstand van  $X$  tot  $B$  gelijk aan 5.



*Hoeveel roosterpunten zijn er die twee keer zover van  $A$  als van  $B$  liggen?*

Estafette-opgave 2 (30 punten, rest 450 punten)

**Het schaakfeestje.**

Jan heeft zes vrienden uitgenodigd voor een schaakfeestje. Er worden vluggertjes gespeeld. Ieder van de zeven jongens speelt op zijn minst één partijtje schaak, maar geen van hen speelt meer dan één partijtje met dezelfde tegenstander. Aan het eind van het feestje vraagt Jan aan ieder van zijn zes gasten: ‘hoeveel partijtjes heb jij vanavond gespeeld?’. Jan krijgt zes verschillende antwoorden.

*Hoeveel partijtjes heeft Jan gespeeld?*

Estafette-opgave 3 (20 punten, rest 430 punten)

**De dobbelsteen.**

Op een dobbelsteen is de *som* van de getallen op overstaande grensvlakken steeds hetzelfde, namelijk 7 (immers 1 en 6 staan tegenover elkaar, 2 en 5 staan tegenover elkaar en 3 en 4 staan tegenover elkaar). We willen nu op de grensvlakken van een kubus verschillende positieve gehele getallen schrijven zodat het *product* van de getallen op overstaande grensvlakken steeds hetzelfde is.

*Welke zes getallen moeten we op de grensvlakken schrijven (van laag naar hoog) als we dat product zo klein mogelijk willen maken?*

Estafette-opgave 4 (30 punten, rest 400 punten)

**De prijs.**

Iemand heeft een prijs gewonnen. Er worden hem twee stapeltjes kaarten voorgehouden. Op elke kaart staat een geldbedrag vermeld. Hij mag (blindelings) uit elk stapeltje vijf kaarten trekken; de som van de bedragen op de tien getrokken kaarten krijgt hij uitbetaald. Het eerste stapeltje bevat

- vijf kaarten met "€0",
- vijf kaarten met "€4",
- vijf kaarten met "€14".

Het tweede stapeltje bevat

- vijf kaarten met "€0",
- vijf kaarten met "€50",
- vijf kaarten met "€60".

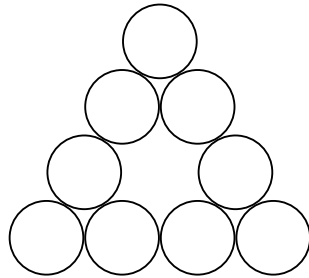
De prijswinnaar krijgt €132.

*Hoeveel kaarten met €0 erop heeft hij getrokken?*

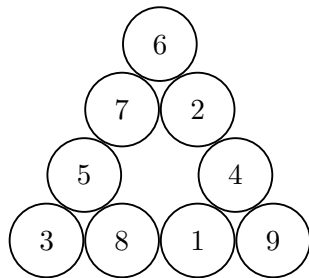
Estafette-opgave 5 (20 punten, rest 380 punten)

**De driehoek.**

Negen cirkels vormen een driehoek.



We schrijven de getallen 1 tot en met 9 in de cirkels, één getal per cirkel. We doen dat zó dat op elk van de drie zijden de som van de vier getallen hetzelfde is. We noemen die som van vier getallen op een zijde dan de *zijdesom*. In het onderstaande voorbeeld is de zijdesom 21.



*Wat is de kleinst mogelijke zijdesom en wat is de grootst mogelijke?*

Estafette-opgave 6 (30 punten, rest 350 punten)

**De halve waarheid.**

Vier personen, Fred, Gemma, Hans en Iris, doen uitspraken over vier verschillende getallen  $u, x, y, z$ :

- Fred zegt:  $x < u < y$ ,
- Gemma zegt:  $z < y < u$ ,
- Hans zegt:  $x < z < u$ ,
- Iris zegt:  $x < z < y$ .

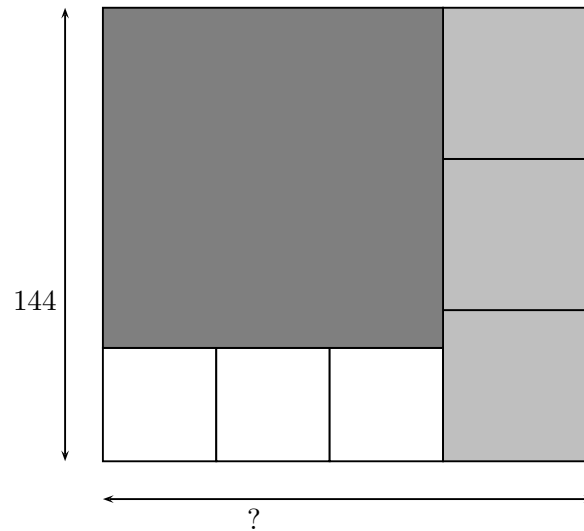
Twee hebben er gelijk, en twee hebben ongelijk.

*Welk getal is het grootste, en welk het kleinste?*

Estafette-opgave 7 (20 punten, rest 330 punten)

**Zeven vierkanten.**

Een rechthoek is verdeeld in zeven vierkanten zoals hieronder geschetst. De lengte van de verticale zijden van de rechthoek bedraagt 144.



*Hoe lang zijn de horizontale zijden van de rechthoek?*

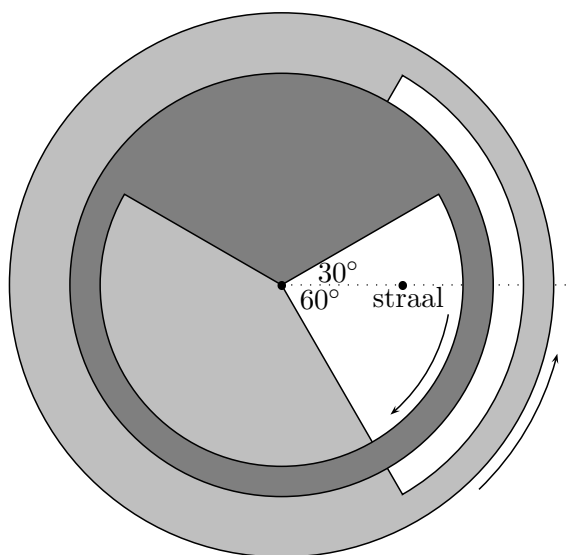
Estafette-opgave 8 (30 punten, rest 300 punten)

**De stroboscoop.**

Op een as zijn twee draaiende schijven gemonteerd; in beide is een sector uitgespaard. In onderstaande tekening kijken we loodrecht op de schijven.

- De grote schijf draait vier keer per seconde in de tegenwijzerrichting; de uitgespaarde sector heeft een middelpuntshoek van  $120^\circ$ .
- De kleine schijf draait vijf keer per seconde in de wijzerrichting; de uitgespaarde sector heeft een middelpuntshoek van  $240^\circ$ .

Een laser stuurt een lichtstraal evenwijdig aan de as. Deze lichtstraal wordt door de twee schijven regelmatig onderbroken. Op zeker moment is de stand van de schijven als in onderstaande tekening.



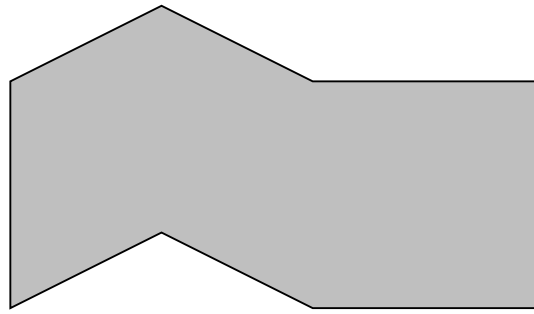
*Welk deel van de tijd wordt licht doorgelaten?*



Estafette-opgave 9 (20 punten, rest 280 punten)

**De zigzag.**

Een achthoek bestaat uit vier paren evenwijdige lijnstukken, zoals onderstaande figuur aangeeft.



*Geef aan hoe je de achthoek in vijf gelijke (congruente) stukken kunt knippen.*

**Estafette-opgave 10 (30 punten, rest 250 punten)**

**Het vliegtuig in.**

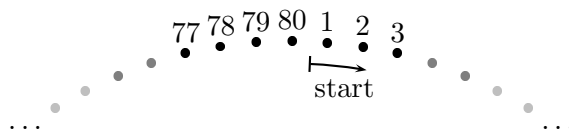
Een vliegtuig heeft honderd zitplaatsen, genummerd van 1 tot en met 100. Er zijn honderd passagiers, ook genummerd van 1 tot en met 100. De passagiers komen één voor één het vliegtuig in: eerst passagier 1, dan passagier 2, enzovoorts. Plaats 1 is bestemd voor passagier 1, plaats 2 voor passagier 2, en zo verder, maar passagier 1 is dronken en neemt op goed geluk een van de plaatsen zonder op het nummer te letten. Daarna gebeurt het volgende. Elke binnenkomende passagier kijkt of de voor hem bedoelde plaats nog vrij is. Zo ja, dan gaat hij daar zitten; zo nee, dan neemt hij willekeurig een vrije plaats.

*Hoe groot is de kans dat passagier 3 op plaats 3 belandt?*

Estafette-opgave 11 (20 punten, rest 230 punten)

**De kaalslag.**

Tachtig bomen staan in een kring, opeenvolgend genummerd  $1, 2, \dots, 80$ . Startend tussen boom 80 en 1 loopt iemand langs de kring en hakt telkens de tweede boom om waar hij voorbijkomt. Bomen nummer 2 en 4 zijn dus de eerste twee die worden geveld. Zo gaat de man door tot er nog maar één boom over is.



*Wat is het nummer van die boom?*

Estafette-opgave **12** (30 punten, rest 200 punten)

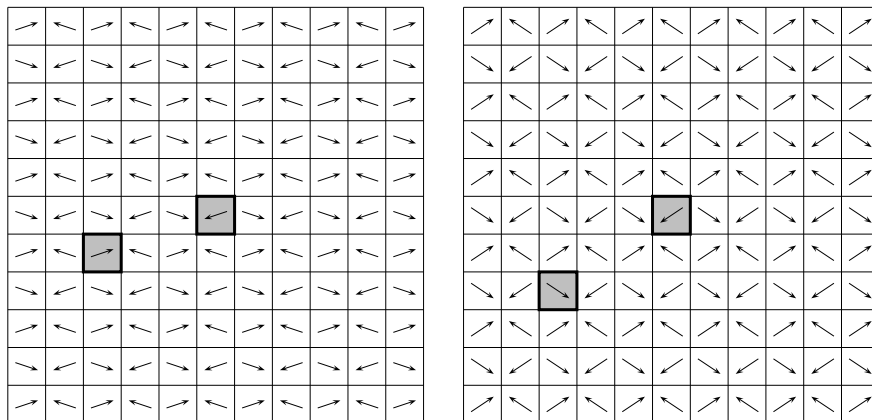
**Op elkaar gericht.**

Een veld bestaat uit 121 vierkante cellen, met in elke cel eenzelfde pijl. De pijlen in aan elkaar grenzende cellen zijn elkaars spiegelbeeld in de grenslijn. Als we aan de centrale pijl (in het middelste veld) draaien, draaien de 120 spiegelbeelden ook allemaal.

We kiezen een cel en richten de centrale pijl op het midden van die cel. We bekijken twee voorbeelden:

- In de linkerfiguur zijn de centrale pijl en zijn spiegelbeeld in de grijze cel precies op elkaar gericht.
- In de rechterfiguur is dat niet het geval.

In de figuren zijn de centrale cel en de gekozen cel grijs gemaakt.



Voor hoeveel van de 120 cellen geldt: ‘Als de centrale pijl naar de cel wijst, dan zijn de pijl in die cel en de centrale pijl precies op elkaar gericht’?

Estafette-opgave 13 (20 punten, rest 180 punten)

**De kwelduivel.**

Een schooljongen heeft in zijn huiswerk foutloos twee getallen van negen cijfers opgeteld. Echter, in de nacht komt een kwelduivel het huis in. Hij kiest twee van de cijfers  $0, 1, 2, \dots, 9$ , en overal in de optelling verwisselt hij deze twee cijfers. Dus als hij bijvoorbeeld 4 en 6 gekozen heeft, dan betekent dat dat hij elke 4 door een 6 en elke 6 door een 4 vervangt. Het resultaat is

$$\begin{array}{r} 312540823 \\ 645044373 \\ \hline 967585196 \end{array}$$

*Welke twee cijfers zijn verwisseld?*

Estafette-opgave 14 (30 punten, rest 150 punten)

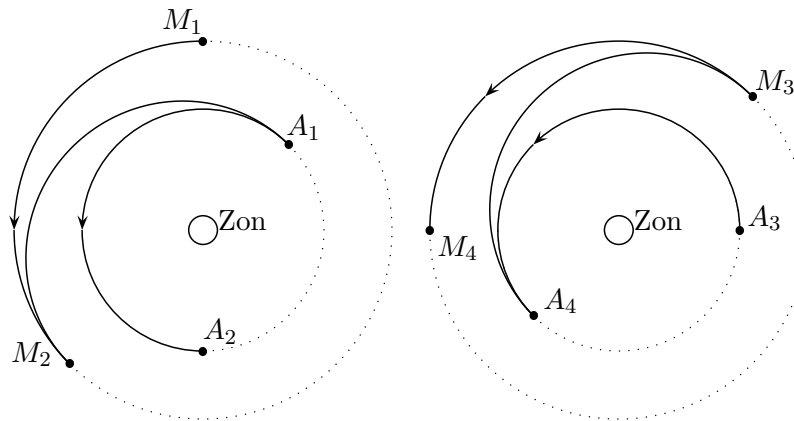
**Verblijf op Mars.**

Er staat een bemande ruimtevlucht op het punt naar Mars te vertrekken. Voor zowel de heenreis als de terugreis kiest men een zogenaamde Hohman-baan; dat is een halve ellips die aan de uiteinden raakt aan de banen van Aarde en Mars. In het bijzonder liggen begin- en eindpunt van de baan op één lijn met de zon. Men doet dit om zo weinig mogelijk stuwstof te hoeven gebruiken. Een gevolg van dit alles is dat alleen bepaalde data geschikt zijn voor lanceringen, en dus ook dat de ruimtevaarders een bepaalde minimumtijd op Mars moeten doorbrengen.

Om het rekenwerk eenvoudig te houden gebruiken we een eigen tijdseenheid (ongeveer  $21\frac{1}{2}$  dag). Aarde doorloopt een cirkelbaan elke 17 tijdseenheden. Mars doorloopt een cirkelbaan (in dezelfde richting) elke 32 tijdseenheden. Heen- en terugreis duren elk 12 tijdseenheden. In onderstaande figuren zijn de posities van Aarde en Mars op vier momenten schematisch weergegeven.

- \* Bij het vertrek van Aarde:  $A_1$  en  $M_1$ .
- \* Bij de aankomst op Mars:  $A_2$  en  $M_2$ .
- \* Bij het vertrek van Mars:  $A_3$  en  $M_3$ .
- \* Bij de aankomst op Aarde:  $A_4$  en  $M_4$ .

De posities  $A_1$  en  $M_2$  liggen op één lijn met de zon, en hetzelfde geldt voor  $M_3$  en  $A_4$ .

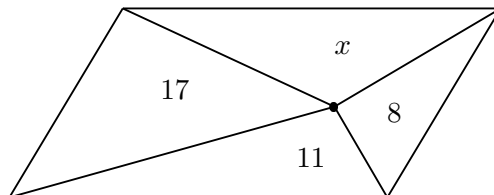


*Hoeveel tijdseenheden moeten de ruimtevaarders minstens op Mars verblijven? Hoewel bovenstaande gegevens uiteraard benaderingen zijn, vragen we een exact antwoord.*

Estafette-opgave 15 (20 punten, rest 130 punten)

**Een parallellogram verdeeld.**

De hoekpunten van een parallellogram zijn verbonden met een punt dat binnen dat parallellogram ligt. Zodoende is het parallellogram verdeeld in stukken waarvan de oppervlakten zich verhouden als  $8 : 11 : 17 : x$ . Zie de figuur.



*Hoe groot is  $x$ ?*

**Estafette-opgave 16 (30 punten, rest 100 punten)**

**De zetelverdeling**

Een parlement bestaat uit 150 zetels, verdeeld over vier partijen. Er zijn besluiten genomen met 100, met 97, met 82 en met 76 stemmen vóór. Daarbij heeft elke partij steeds als blok gestemd, en er waren geen onthoudingen.

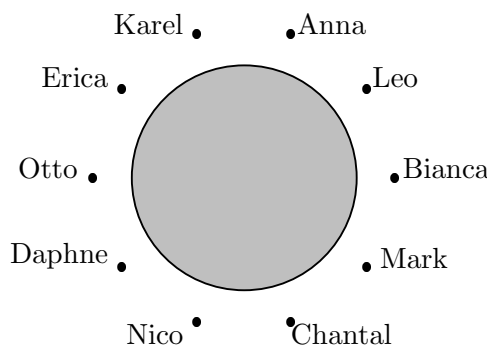
*Hoeveel zetels bezetten de partijen elk (van groot naar klein)?*



Estafette-opgave 17 (20 punten, rest 80 punten)

**De tafelschikking.**

Vijf vrouwen Anna, Bianca, Chantal, Daphne, en Erica en vijf mannen Karel, Leo, Mark, Nico en Otto zitten aan een ronde tafel, in de hieronder getekende posities. Elk van de vrouwen is getrouwd met één van de mannen. Anna is getrouwd met Karel; verder zit geen man naast zijn echtgenote. Eén vrouw zit tegenover haar man.



*Met wie zijn Bianca, Chantal, Daphne en Erica respectievelijk getrouwd?*

Estafette-opgave 18 (30 punten, rest 50 punten)

**Met alle cijfers.**

Er zijn vier manieren om uit de cijfers  $1, 2, 3, \dots, 9$  drie getallen van elk drie cijfers te vormen zó dat het tweede getal het dubbele van het eerste is, en het derde getal het drievoud van het eerste. Drie manieren zijn:

192		219		273
384	,	438	en	546
576		657		819

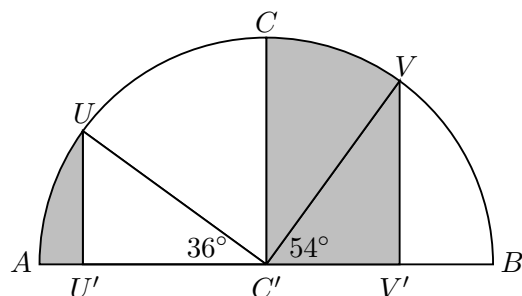
Zo is bijvoorbeeld:  $384 = 2 \times 192$  en  $576 = 3 \times 192$ .

*Wat is de vierde manier?*

Estafette-opgave 19 (20 punten, rest 30 punten)

**In een halve cirkel.**

In de figuur zie je een halve cirkel met middelpunt  $C'$ . De lijnstukken  $UU'$ ,  $CC'$  en  $VV'$  staan loodrecht op de middellijn  $AB$ . Verder is  $\angle AC'U = 36^\circ$  en  $\angle BC'V = 54^\circ$ . Binnen de halve cirkel zijn de stukken  $AUU'$  en  $CC'V'V$  grijs aangegeven; deze stukken worden begrensd door lijnstukken en een cirkelboog.



*Als de oppervlakte van de halve cirkel 1 bedraagt, wat is dan de totale oppervlakte van de twee grijze stukken?*

**Estafette-opgave** 20 (30 punten, rest 0 punten)

**Plussen en minnen.**

Bekijk het onderstaande schema:

$$0 ? 1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5$$

Als we op de plaatsen van de vraagtekens een plusteken of een minteken invullen, levert dat een uitdrukking met een zeker geheel getal als waarde.

We kunnen bijvoorbeeld de waarde  $-7$  krijgen door de plaatsen als volgt in te vullen:

$$0 + 1 - 2 + 3 - 4 - 5.$$

*Hoeveel verschillende getallen kun je als waarde krijgen?*