
WISKUNDE-ESTAFETTE KUN 2000

60 Minuten voor 20 opgaven.

Het totaal aantal te behalen punten is 500

1 (20 punten)

Maak sommige vakjes zwart, zó dat voor elk vakje het getal dat erin staat precies aangeeft hoeveel zwarte vakjes eraan grenzen.

2	1	1	2
0	2	3	0
2	2	1	2
1	2	2	1

(“Eraan grenzen” betekent: er een zijde mee gemeen hebben.) Op deze vraag mag je maar één keer antwoord geven.

2 (30 punten)

Schrijf $81 + 80(81 + 81^2 + 81^3 + \cdots + 81^{30})$ als een macht van een priemgetal of als een product van machten van priemgetallen.

3 (20 punten)

Hoe groot moet de straal van een rond bord zijn opdat je er zeven ronde stroopwafels op kunt leggen zonder dat ze over de rand uitsteken of gedeeltelijk op elkaar liggen? (De straal van een stroopwafel is 3cm)

4 (20 punten)

Iemand heeft voor zich op tafel drie munten liggen: een stuiver, een dubbeltje en een kwartje:

SDK .

Hij verwisselt de munten van het linker paar:

DSK ;

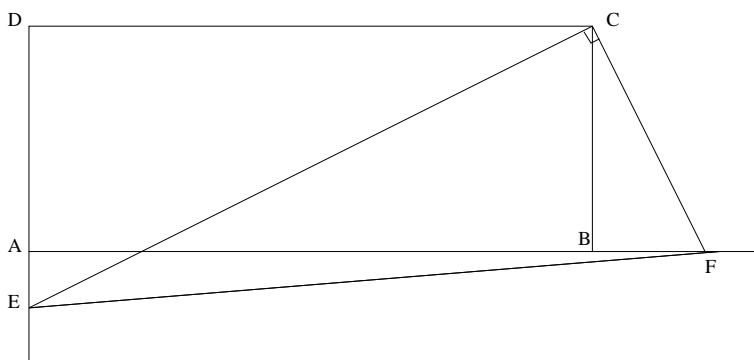
dan verwisselt hij die van het rechter paar:

DKS ;

dan weer die van het linker, enz. In welke volgorde liggen de munten na 2000 verwisselingen?

5 (20 punten)

Zie figuur. Van de rechthoek $ABCD$ is de zijde AB 8 cm lang; de zijde BC is 4 cm lang. E ligt op de lijn door D en A . F ligt op de lijn door A en B zó dat $\angle ECF = 90^\circ$ en zó dat de oppervlakte van driehoek ECF 25 cm^2 is.



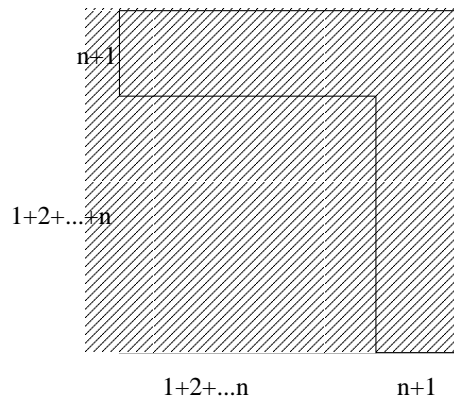
Hoe lang is AE ?

6 (30 punten)

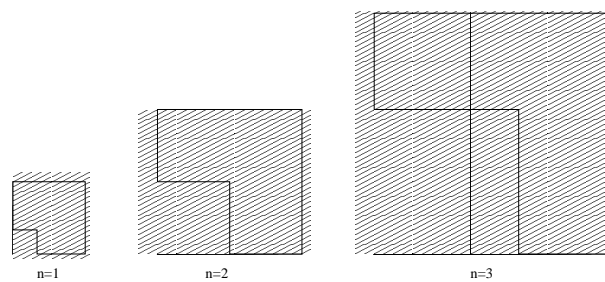
Geef positieve reële getallen x_1, x_2, \dots, x_{10} zó dat elk van deze getallen gelijk is aan de som van de kwadraten van de overige.

7 (30 punten)

Voor elk positief geheel getal n maken we de volgende “winkelhaak”:



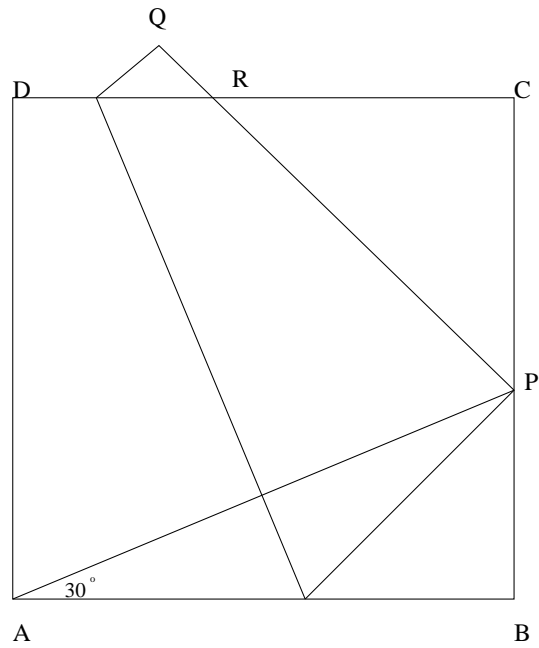
Hieronder een paar concrete gevallen.



Wat is de som van de derde machten van de getallen 1 t/m 100? Geef het antwoord in de gebruikelijke decimale schrijfwijze.

8 (30 punten)

$ABCD$ is een vierkant stuk papier van 3 dm bij 3 dm. P is een punt van de zijde BC zó dat de hoek BAP 30° groot is. Dat stuk papier wordt zo gevouwen dat A in P valt. Daarbij valt D in Q ; R is het snijpunt van de zijkant CD met PQ (de omgevouwen zijkant AD).



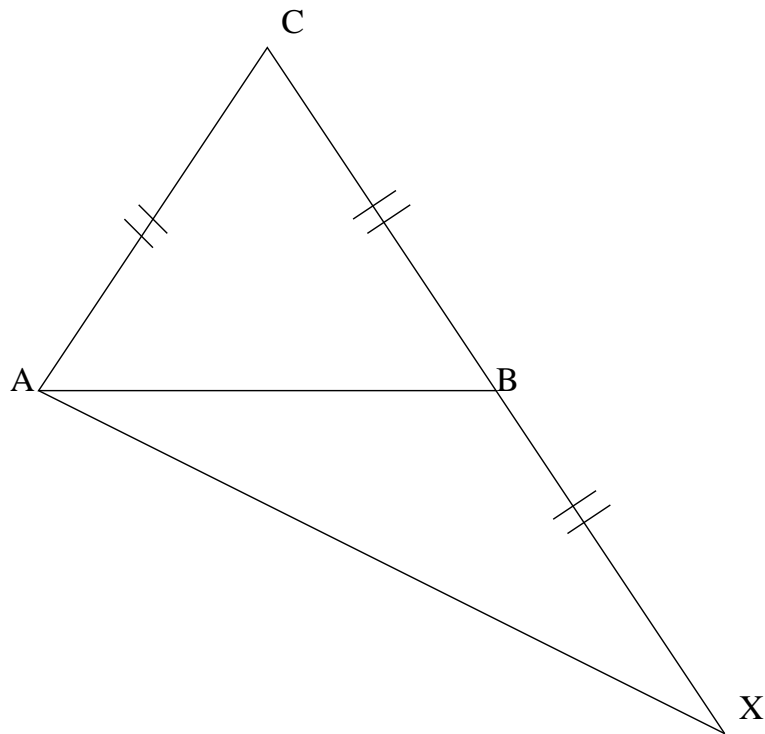
Bereken de straal van de ingeschreven cirkel van driehoek PCR .

9 (20 punten)

Welke priemmachten p^k zijn precies 16 keer zo groot als het aantal van hun delers?

10 (20 punten)

Driehoek ABC is gelijkbenig: de zijden AC en BC zijn even lang. Zie figuur.



De zijde CB is bij B verlengd met het lijnstuk BX dat even lang is als de zijde BC . Nu blijkt hoek X van de driehoek ACX half zo groot te zijn als hoek C van de driehoek ACX . Bereken de hoeken van driehoek ABC .

11 (30 punten)
“Kruiswoord.”

1	2	3
2		
3		

Horizontaal

1. macht van 2
2. macht van 2
3. veelvoud van 37

Verticaal

1. veelvoud van 37
2. de cijfers van 1 horizontaal in een andere volgorde
3. de cijfers van 2 horizontaal in een andere volgorde

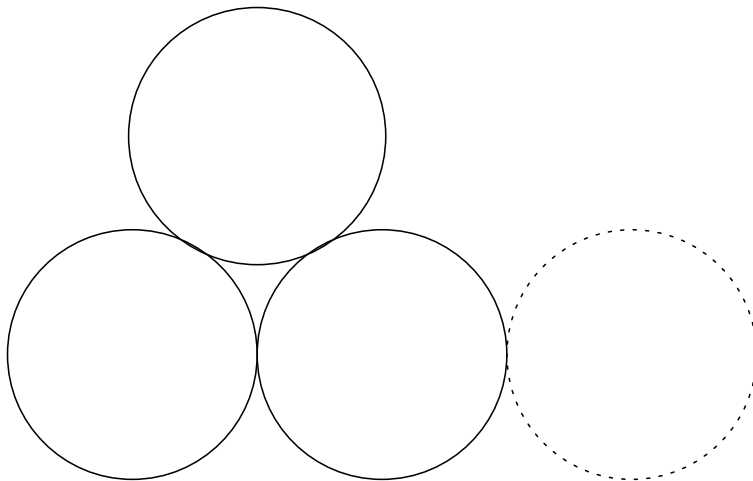
Je mag op deze vraag maar één keer antwoord geven.

12 (20 punten)

Negentien personen zijn in vergadering bijeen. Elf van hen dragen een bril; elf van hen dragen een das; zeven van hen dragen sandalen. Er zijn er vijf die zowel een bril als een das dragen; drie die zowel een das als sandalen dragen en vier die zowel sandalen als een bril dragen. Hoeveel van hen dragen zowel een das als een bril als sandalen?

13 (20 punten)

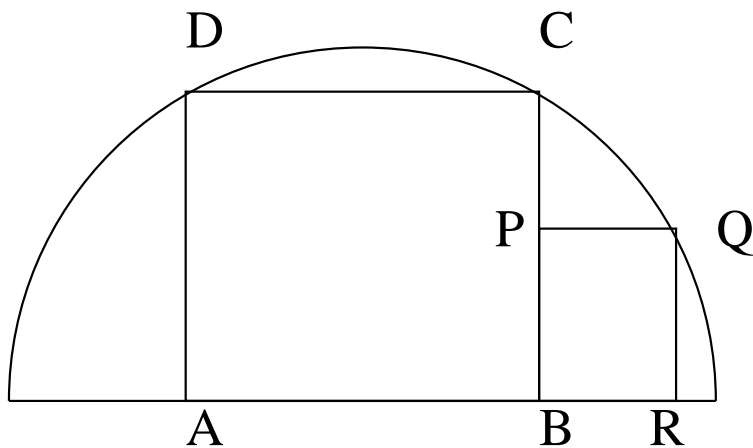
Drie dubbeltjes liggen in een driehoek op tafel; een vierde rolt eromheen.



Hoe vaak draait het vierde dubbeltje daarbij om zijn eigen as?

14 (30 punten)

In een halve cirkelschijf is een vierkant $ABCD$ beschreven. Zie figuur.



De oppervlakte van het vierkant is 100 cm^2 . P is het midden van BC . Hoe groot is de oppervlakte van rechthoek $BPQR$?

15 (30 punten)

Welke rest krijg je bij deling van 1993^{1993} door 100?

16 (20 punten)

Wat is het maximum van $(a+b)(c+d+e+f+g)$ met $\{a, b, c, d, e, f, g\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

17 (30 punten)

Geef alle rijtjes (a, b, c, d, e) van positieve gehele getallen met $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ waarvoor geldt dat $a + b + c + d + e = abcde$.

18 (30 punten)

Geef het kleinste natuurlijke getal n met decimale schrijfwijze

$$a_k a_{k-1} \dots a_2 7$$

(a_2, \dots, a_k) zijn cijfers!) waarvoor geldt: de decimale schrijfwijze van $5n$ is

$$7a_k a_{k-1} \dots a_2.$$

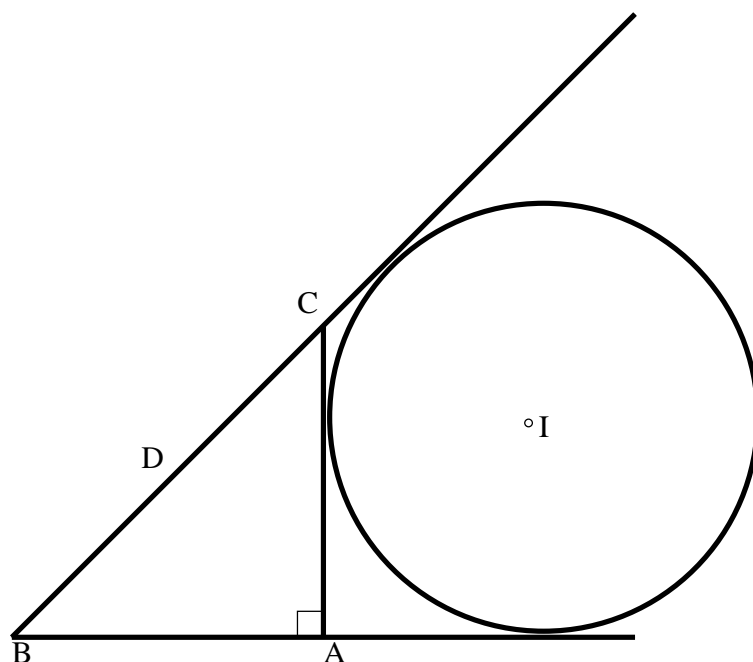
19 (20 punten)

Geef alle paren gehele getallen (m, n) zó dat

$$2m^2 + n^2 = 2mn + 3n.$$

20 (30 punten)

Zie figuur. Driehoek ABC is rechthoekig en gelijkbenig. Hoek A is recht en de lengte van zijde AB is $\sqrt{2}$. D is het midden van BC en I is het middelpunt van de cirkel die raakt aan AC en aan de verlengden van BA en BC .



Bereken de afstand van D tot I .

21 (0 punten)

Tie break.

Noem alle tienvouden onder de 500 die niet als score bij de zojuist gespeelde estafette kunnen optreden. Er waren tien opgaven met 20 (of 0) punten en tien opgaven met 30 (of 0) punten.