
WISKUNDE-ESTAFETTE 2012

Uitwerkingen

1

Noem de zeven cijfers even a t/m g .

$$\begin{array}{r} a \quad b \\ c \quad d + \\ \hline e \quad f \quad g \end{array}$$

Omdat de twee getallen die we optellen beide kleiner zijn dan 100 moet het resultaat kleiner dan 200 zijn. Dus $e = 1$. Verder moet $a + c \geq 9$ zijn. Maar $a + c = 9$ werkt niet, want er zijn in dat geval niet genoeg grote cijfers om $b + d \geq 10$ te laten zijn. Dus a of c is 6 en de ander is 4 of 5.

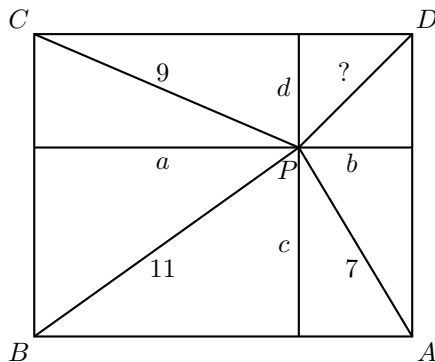
Merk op dat b , d en g niet 0 kunnen zijn. Dus $f = 0$. En dus moet gelden dat $a = 6$ en $c = 4$ of andersom. Dan blijven 2, 3 en 5 over voor b , d en g , en dat werkt precies als $g = 5$. Het getal van drie cijfers is dus 105.

2

$10^{2012} - 1$ bestaat uit 2012 negens en $10^4 - 1 = 9999$. Voeren we de deling $\frac{10^{2012}-1}{10^4-1}$ uit dan bestaat het resultaat uit een 1 gevolgd door drie nullen en dan weer een 1 gevolgd drie nullen enz., todat het eindigt met een 1. Omdat $2012/4 = 503$, zitten er 503 1'en in de uitkomst. En dus 502 setjes van drie nullen. Dat maakt 1506 nullen in totaal.

3

Trek door het punt P de twee lijnen evenwijdig aan de zijdes van de rechthoek. Zie het plaatje.



De letters a t/m d geven de afstand van P tot de zijdes aan. Met de stelling van Pythagoras zien we dat $a^2 + c^2 = 121$, $a^2 + d^2 = 81$, $b^2 + c^2 = 49$ en dat $b^2 + d^2$ gelijk is aan het kwadraat van de gevraagde afstand. Een snelle berekening leert ons:

$$\begin{aligned} 9 &= 81 + 49 - 121 \\ &= (a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) - (a^2 + c^2) \\ &= b^2 + d^2 \end{aligned}$$

En dus $|DP| = 3$.

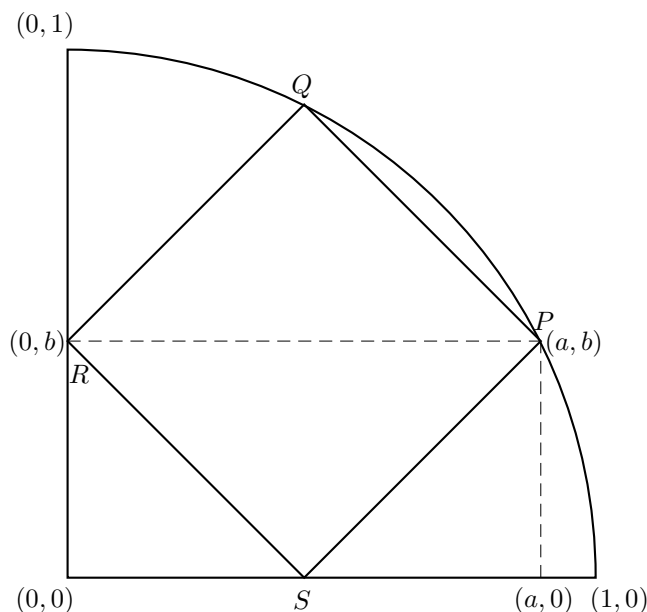
4

Persoon 1 en 10 kunnen niet allebei de waarheid spreken, dus er zijn maximaal negen personen die de waarheid hebben gesproken. De tabel hieronder laat zien dat negen personen ook daadwerkelijk mogelijk is:

Persoon	Handen geschud met
1	6, 7, 8, 9, 10
2	10
3	9, 10
4	8, 9, 10
5	7, 8, 9, 10
6	1, 7, 8, 9, 10
7	1, 5, 6, 8, 9, 10
8	1, 4, 5, 6, 7, 9, 10
9	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10
10	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

5

Plaats het plaatje in een coördinatensysteem zodat O in de oorsprong ligt, A op het punt $(0, 1)$ en B op het punt $(1, 0)$. We schrijven (a, b) voor de coördinaten van het punt P . Zie het plaatje:



Vanwege de symmetrie moet het vierkant onder een hoek van 45 graden met de assen liggen. Dus het punt R ligt op $(0, b)$ en punt S ligt op $(b, 0)$. Maar de x -coördinaat van S moet midden tussen die van P en R in liggen, dus $a = 2b$. Dus de coördinaten van punt P zijn $(2b, b)$. Maar er was gegeven dat P op de cirkel met straal 1 om de oorsprong ligt. De stelling van Pythagoras zegt dan dat $(2b)^2 + b^2 = 1$, waaruit volgt dat $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Om nu de lengte van de RS te bepalen kunnen we weer Pythagoras gebruiken in de driehoek OSR . Dit geeft als antwoord $|RS| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. De oppervlakte van het vierkant is het kwadraat hiervan, oftewel $\frac{2}{5}$.

6

De minutenwijzer gaat in 1 uur de hele klok rond. Dat zijn $60 * 60 = 3600$ seconden. Dus per seconde draait de minutenwijzer $\frac{1}{10}$ graad verder. De urenwijzer gaat de klok in 12 uur rond. Dat is 12 keer zo langzaam als de minutenwijzer, dus de urenwijzer draait $\frac{1}{120}$ graad per seconde. De hoek in graden tussen de twee wijzers is na t seconden dus $(\frac{1}{10} - \frac{1}{120})t = \frac{11}{120}t$.

Als de punten van de wijzers afstand 1 hebben, vormen de punten samen met het middelpunt van de klok een gelijkzijdige driehoek. Dus op dat moment maken de wijzers een hoek van 60 graden. Als we dit gelijkstellen aan de gevonden formule voor de hoek tussen de wijzers krijgen we $60 = \frac{11}{120}t$. Hieruit volgt dat $t = 654\frac{6}{11}$. Er zijn dus 654 hele seconden verstreken.

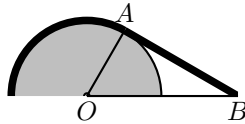
7

2012 staat natuurlijk op plek 2012 in de rij $1, 2, 3, 4, \dots$. Onze rij ontstaat uit deze rij door de kwadraten en derdemachten weg te laten. Voor elk getal kleiner dan 2012 dat we weglaten zakt de positie van 2012 met één. We hoeven dus alleen het aantal kwadraten en derdemachten van 2012 af te trekken om het antwoord te vinden.

Nu is $44^2 = 1936$ en $45^2 = 2025$; dus er zijn 44 kwadraten kleiner dan 2012. En $12^3 = 1728$ en $13^3 = 2197$; dus er zijn 12 derdemachten kleiner dan 2012. Dat geeft $2012 - 44 - 12 = 1956$, maar dit is niet goed want we hebben de zesdemachten dubbel geteld. En dat zijn er drie want $3^6 = 729$ en $4^6 = 4096$. Dus het eindantwoord is 1959.

8

Omdat het plaatje symmetrisch is, kijken we alleen naar een kwart van het geheel:



Hierin is O het middelpunt van het linker wiel, A het punt waar de band van het wiel loskomt en B het punt waar de band zichzelf kruist. Omdat A het punt is waar de band van het wiel loskomt, is de lijn door A en B een raaklijn aan de cirkel. Dus hoek OAB is recht.

Er is gegeven dat $|OA| = 1$ en $|OB| = 2$. Met Pythagoras zien we dat $|AB| = \sqrt{3}$. En nu herkennen we de 30-60-90-driehoek in OAB . Dus hoek AOB is 60 graden, oftewel $\frac{\pi}{3}$ radialen. Het deel van de band dat zich over de cirkelboog spant is heeft dus een lengte van $\frac{2\pi}{3}$.

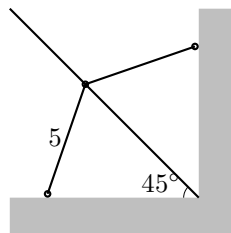
In totaal is de lengte van de band dus $4(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3})$.

9

Als $xy = x + 4y$, dan $xy - x - 4y = 0$. Verder is $(x - 4)(y - 1) = xy - x - 4y + 4$. Dus $(x - 4)(y - 1) = 4$. Omdat x en y positieve gehele getallen moeten zijn, volgt dat $x - 4$ een positieve deler van 4 moet zijn. Dus $x - 4$ is 1, 2 of 4. Dat geeft dat x gelijk is aan 5, 6 of 8. y is dan gelijk aan respectievelijk 5, 3 of 2.

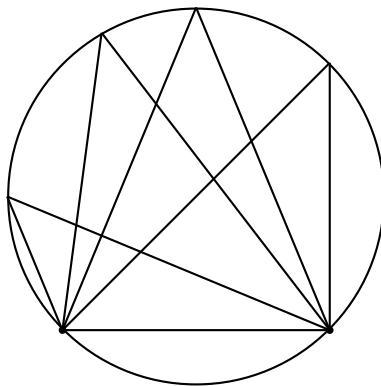
10

Ongeacht hoe je het gebied precies afbakt, als je een rechte lijn trekt door de hoek van de sloot en de middelste paal, dan deel je het gebied in twee even grote driehoekige gebieden. Zie de figuur:



Deze driehoeken hebben een hoek van 45° met daartegenover een zijde van lengte 5. Het probleem is dus eigenlijk om de grootste driehoek met die eigenschap te vinden.

Als we de zijde van lengte 5 vasthouden en het hoekpunt waar de hoek 45° is variëren, dan beschrijft dat hoekpunt een cirkelboog. Zie de figuur:



Hierin hebben we een aantal driehoeken met vaste basis en een tophoek van 45° getekend. De maximale oppervlakte wordt bereikt wanneer de top van de driehoek op de top van de cirkel ligt. De driehoek is dan gelijkbenig. Dus de gevraagde hoek is $\frac{180-45}{2} = 67,5$ graden of $\frac{3}{8}\pi$ radialen.

11

Voor elk geheel getal n waavor $1 < n < 2012$ voldoet $x = n + \frac{1}{n}$. Want dan is $[x] = n$ en $\{x\} = \frac{1}{n}$. Dit geeft 2010 verschillende oplossingen. We laten nu zien dat dit ook alle oplossingen zijn.

Als $x = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}}$, dan kan x geen geheel getal zijn, want in dat geval is $\{x\} = 0$ en dan is $\frac{1}{\{x\}}$ niet gedefinieerd. Net zo moet x groter dan of gelijk aan 1 zijn, want anders is $[x]$ gelijk aan 0.

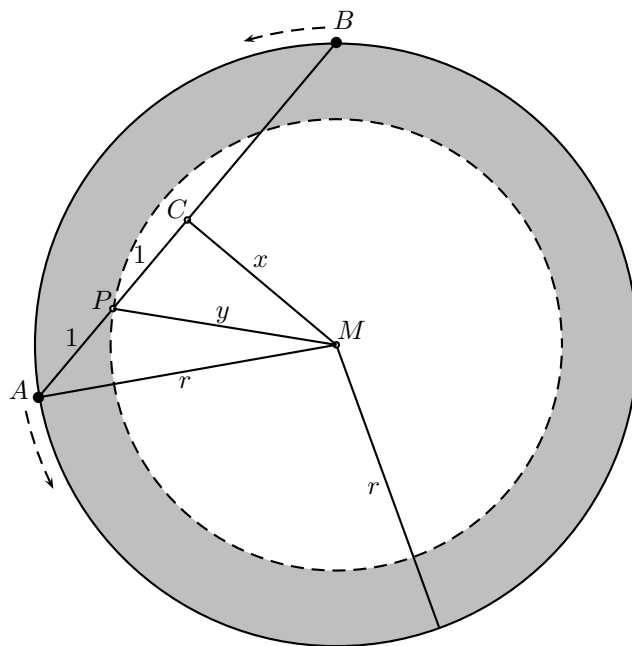
Stel dat $1 < x < 2$. Dan is $[x] = 1$ en dus $\frac{1}{[x]} = 1$. Omdat $0 < \{x\} < 1$ voor alle x , volgt dat $\frac{1}{\{x\}} > 1$. Dus $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} > 2$ en dat kan dus niet gelijk zijn aan x .

We hebben nu al gezien dat alle oplossingen groter dan 2 moeten zijn. We laten nu nog zien dat tussen een geheel getal n en $n + 1$ maximaal één oplossing kan liggen, namelijk $n + \frac{1}{n}$. Beschouw een getal x zodat $n < x < n + 1$, dan is $[x] = n$. Als $x < n + \frac{1}{n}$, dan is $\{x\} < \frac{1}{n}$, dus $\frac{1}{\{x\}} > n$, en daarom $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} > \frac{1}{n} + n > x$.

Als $x > n + \frac{1}{n}$, dan is $\{x\} > \frac{1}{n}$ en dus $\frac{1}{\{x\}} < n$. En dan geldt $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} < \frac{1}{n} + n < x$. Dus alle oplossingen zijn van de vorm $x = n + \frac{1}{n}$ voor een geheel getal $n > 1$.

12

We trekken eerst een paar hulplijnen:



Hier is M het middelpunt van de cirkel en C is het midden van AB . De afstand $|CM|$ is met x aangegeven en de afstand $|PM|$ met y .

Omdat hoek ACM recht is, kunnen we met Pythagoras afleiden dat $x^2 + 4 = r^2$ en $x^2 + 1 = y^2$. Dus $y^2 = r^2 - 3$. De oppervlakte van de grote cirkel is πr^2 en de oppervlakte van de binnenste cirkel is $\pi y^2 = \pi(r^2 - 3) = \pi r^2 - 3\pi$. Dus de oppervlakte van het grijze gebied is gelijk aan 3π .

13

Om bij 01 uit te komen moet het voorlaatste getal 10 zijn. Om op die 10 te komen moet je een getal kleiner dan 10 hebben. Dit kan je verkrijgen door van een tienvoud de twee cijfers om te draaien. De snelste manier om vanuit een getal op 01 te komen is als volgt:

- 1) Als je getal groter dan of gelijk aan 90 is draai dan de cijfers om.
- 2) Tel 1 bij je getal op, totdat je op een tienvoud uitkomt.
- 3) Draai de cijfers om. Als je bij 01 bent, stop dan.
- 4) Tel 1 bij je getal op, totdat je op 10 uitkomt.
- 5) Draai de cijfers om. Nu ben je bij 01.

Getallen groter of gelijk aan 90 zijn zo altijd in hoogstens 12 stappen klaar. Anders duurt dit proces maximaal 9 stappen bij 2), 1 stap bij 3), 8 stappen bij 4) en 1 stap bij 5); dat is in totaal maximaal 19 stappen. Dit maximum wordt bereikt als je begint met 11.

14

Merk op dat een getal niet tegelijk een 3-voud kan zijn en als som van de cijfers 10 kan hebben. Dus er kunnen maximaal vijf eigenschappen tegelijk gelden. Voor 55 gelden maar drie eigenschappen. Voor alle andere getallen kunnen er dus maximaal vier eigenschappen gelden. Een getal met vier van de eigenschappen moet dus een 7-voud plus 2 zijn, een som van twee kwadraten zijn, oneven zijn en ofwel een 3-voud zijn of som van de cijfers 10 hebben.

Door simpelweg alle oneven 7-vouden plus 2 af te lopen, zie je dat alleen 37, 65 en 97 de som van twee kwadraten zijn. Dit zijn geen van alle 3-vouden, maar 37 heeft wel 10 als som van de cijfers. Dus 37 is het enige getal dat vier van de eigenschappen heeft.

15

We weten dat $4711 \cdot \frac{1}{4711}$ gelijk moet zijn aan 1. Aan de ander kant verkrijgen we de decimale ontwikkeling van $4771 \cdot \frac{1}{4711}$ door het repeterende blok van $\frac{1}{4711}$ te nemen, dat met 4711 te vermenigvuldigen en dat dan repeterend achter de komma te zetten. Omdat dit gelijk moet zijn aan 1, volgt dat 4711 maal het repeterende blok uit alleen maar negens kan bestaan. De laatste twee cijfers van het blok moeten dus 09 zijn.

16

Elk van de drie gewichten kunnen we op drie manier op de balans plaatsen: bij de rijst, op de andere schaal of helemaal niet. Dit geeft 27 verschillende mogelijkheden. Maar 1 hiervan gebruikt de gewichten helemaal niet en de helft van de andere zet meer gewicht bij de rijst dan op de andere schaal. Er blijven dus maar 13 zinnige manieren over om de gewichten te verdelen.

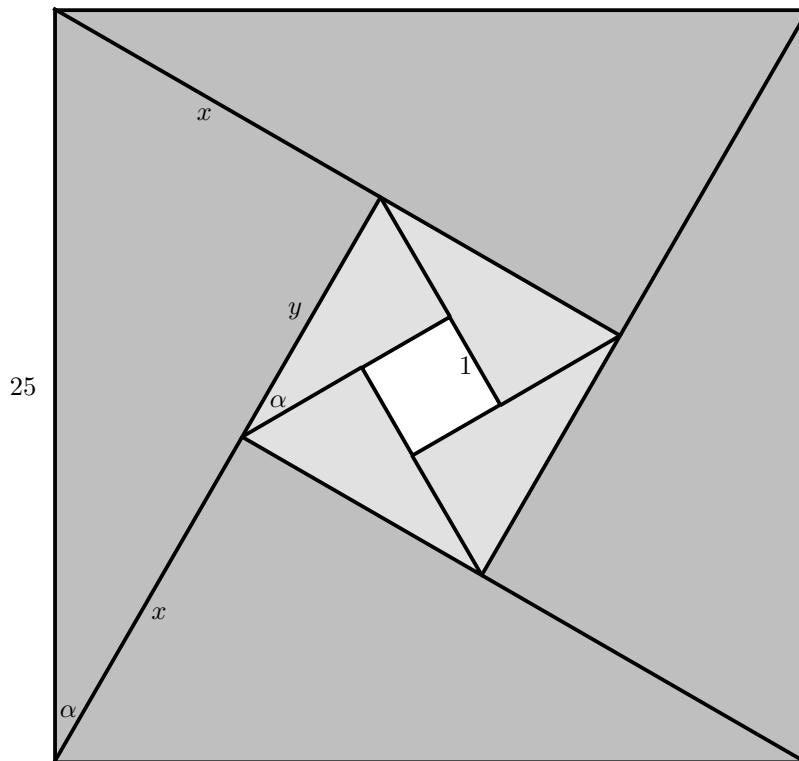
Omdat we altijd kunnen bepalen hoe zwaar de rijst is, volgt dat deze 13 verdelingen alle even gewichten van 2 t/m 26 kilo exact moeten kunnen afmeten. Als de zak niet een even aantal kilo's weegt, dan kunnen we bijvoorbeeld zien dat hij zwaarder is dan 10 kilo maar lichter dan 12 en dus 11 kilo moet wegen. Hieruit volgt dat de drie gewichten elk een even aantal kilo's weegt en dat ze samen 26 kilo wegen. Ook moeten alle drie gewichten verschillend zijn omdat we anders niet 13 verschillende gewichten exact kunnen afmeten. Als de gewichten 2, 6 en 18 kilo wegen dan kunnen we elk even gewicht t/m 26 kilo exact afpassen. Bijvoorbeeld als je 22 kilo willen afwegen, dan plaatsen we het gewicht van 2 kilo bij de rijst en de andere twee op de andere schaal.

Het is wat lastiger om in te zien dat 2, 6 en 18 ook de enige oplossing is. Het lichtste gewicht moet 2 kilo wegen, anders kun je namelijk niet exact 24 kilo afwegen. Want dat moet gebeuren door de twee zwaarste gewichten tegenover de rijst te hangen en niks erbij. Dus de twee zwaarste gewichten wegen samen 24 kilo en dus het lichtste 2 kilo. We kunnen nu gewoon alle opties nagaan:

- 2, 4 en 20 kilo werkt niet omdat je dan 8 kilo niet kan afwegen.
- 2, 6 en 18 kilo werkt wel.
- 2, 8, en 16 kilo werkt niet omdat je dan 4 kilo niet kan afwegen.
- 2, 10 en 12 kilo werkt niet omdat je dan 6 kilo niet kan afwegen.

17

Noem de lengte van de zijdes van het middelste vierkant y .



Uite de gelijkvormigheid van de driehoeken volgt dat $25 : y = y : 1$. Dus $y = 5$. Verder volgt uit de stelling van Pythagoras dat $25^2 = x^2 + (x+y)^2 = 2x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 10x + 25$. Hieruit volgt dat $x = 15$.

18

De vier hoekpunten van een tetraëder liggen niet in één vlak. Er is dus geen enkel vlak met gelijke afstand tot deze punten zodat ze allemaal aan de zelfde kant liggen. Dus elk vlak met gelijke afstand tot de hoekpunten deelt deze punten in twee groepen.

Er zijn twee mogelijkheden: elk groepje bevat twee punten of een groepje bevat drie punten en het andere bestaat uit slechts een enkel punt. Er zijn drie manieren om de hoekpunten in twee groepjes van twee te verdelen. Bij elke verdeling hoort precies één vlak, dat op gelijk afstand tot alle punten ligt en de punten zo verdeelt. Stel het eerste groepje bestaat uit punt A en B en het andere groepje is punt C en D . Dan loopt dit vlak parallel aan de zijdes AB en CD en door de middens van de zijdes AC , AD , BC en BD .

Er zijn verder nog vier manieren op de punten in een groepje van drie en een los punt te verdelen. Ook bij elk van deze verdelingen hoort precies één vlak. Noem het losse punt A

en de andere drie B , C en D . Het vlak, dat de punten op deze manier scheidt en op gelijke afstand van alle punten ligt, loopt evenwijdig aan het zijvlak BCD en door de middens van de zijdes AB , AC en AD .

In totaal zijn er dus 7 vlakken met gelijke afstand tot alle punten.

19

Stel $5a^2 - 4b^2 = 1$, dan is $5(a^2 - 1) = 4(b^2 - 1)$. Dus 4 is een deler van $a^2 - 1$. a moet dus oneven zijn, zeg $a = 2k + 1$. Ook is 5 een deler van $b^2 - 1$, dus b is een vijfvoud plus of min 1; zeg $b = 5n \pm 1$.

Als we dit invullen en vereenvoudigen vinden we dat $k(k + 1) = n(5n \pm 2)$. Nu is $k(k + 1)$ altijd even, dus n moet even zijn; zeg $n = 2m$. Dan vinden we dat $k(k + 1) = 4m(5m \pm 1)$. Hieruit volgt dat k of $k + 1$ een viervoud is. dus $k = 4p$ of $k = 4p - 1$ voor een zekere p . Dit geeft ons $p(4p \pm 1) = m(5m \pm 1)$.

Probeer nu $p = m$. We vinden dan een oplossing als we links $+$ kiezen voor \pm en rechts $-$, namelijk $p = m = 2$. Dat geeft $k = 8$ en $n = 4$, zodat $a = 17$ en $b = 19$. Het is eenvoudig te controleren dat er geen kleinere oplossing is.

20

Voordat we de opgave zelf kunnen oplossen, moeten we eerst een eigenschap van de bizynia vaststellen. En wel deze: een bizynia met n bloemen heeft altijd $2n - 1$ stelen. Dit kunnen we zo inzien. Een bizynia met maar één bloem heeft ook maar één steel. Stel we hebben een bizynia met n bloemen en $2n - 1$ stelen. Als we hierin nu een steel doorknippen en daarmee k bloemen afknippen, dan heeft het afgeknipte deel $2k - 1$ stelen. één daarvan is de helft van de doorgeknipte steel. Dus door de knip verliest de byzinia $2k - 2$ stelen. Maar er groeien twee nieuwe bloemen en twee nieuwe stelen aan. Na afloop heeft de byzinia dus $n - k + 2$ bloemen en $2n - 1 - (2k - 2) + 2 = 2(n - k + 2) - 1$ stelen.

Stel dat de bizynia n bloemen en $2n - 1$ stelen had voor dat Ole ging knippen. Nadat Ole geknipt heeft zijn er nog $\frac{1}{2}n$ bloemen en dus $n - 1$ stelen. Gegeven is dat dit aantal stelen gelijk is aan $\frac{29}{59} \cdot (2n - 1)$. Hieruit volgt dat $n = 30$.

Na het knippen zijn er dus 15 bloemen. Daarvan zijn er 10 nieuw, want Ole heeft vijf keer geknipt. Er zijn dus 5 bloemen van voor het knippen over. Er zijn er dus 25 afgeknipt.