

Uitwerking opgave 1

Omdat

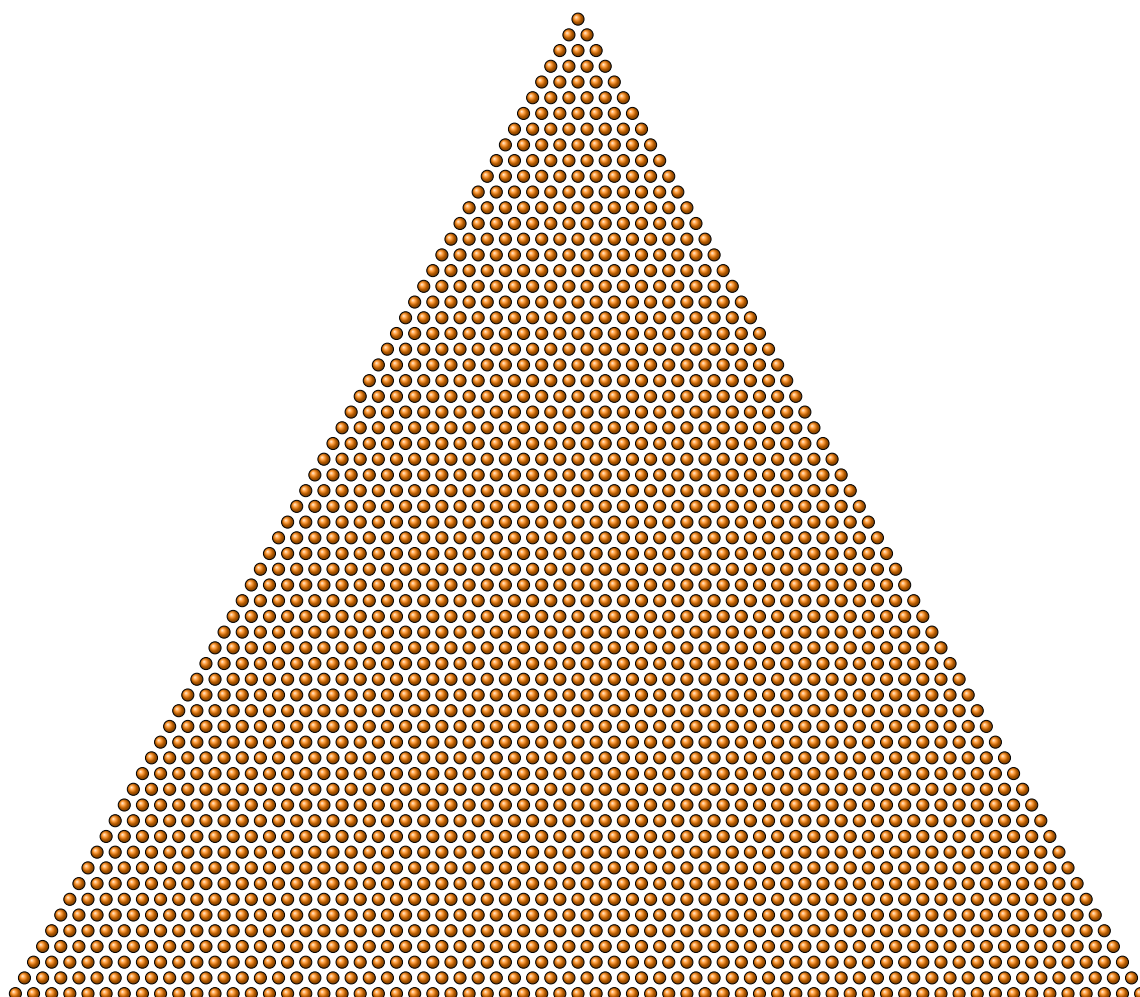
$$\begin{aligned}
 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) &= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1) \\
 &= (1 + n) + (2 + (n - 1)) + (3 + (n - 2)) + \dots + (n + 1) \\
 &= n(n + 1)
 \end{aligned}$$

geldt dat

$$n(n + 1) = 2 \cdot 2016 = 2 \cdot 32 \cdot 9 \cdot 7 = 64 \cdot 63$$

Dus $n = 63$.

Hieronder zie je een driehoekspatroon van 2016 bolletjes. Vandaar de naam driehoeksgetal.



Uitwerking opgave 2

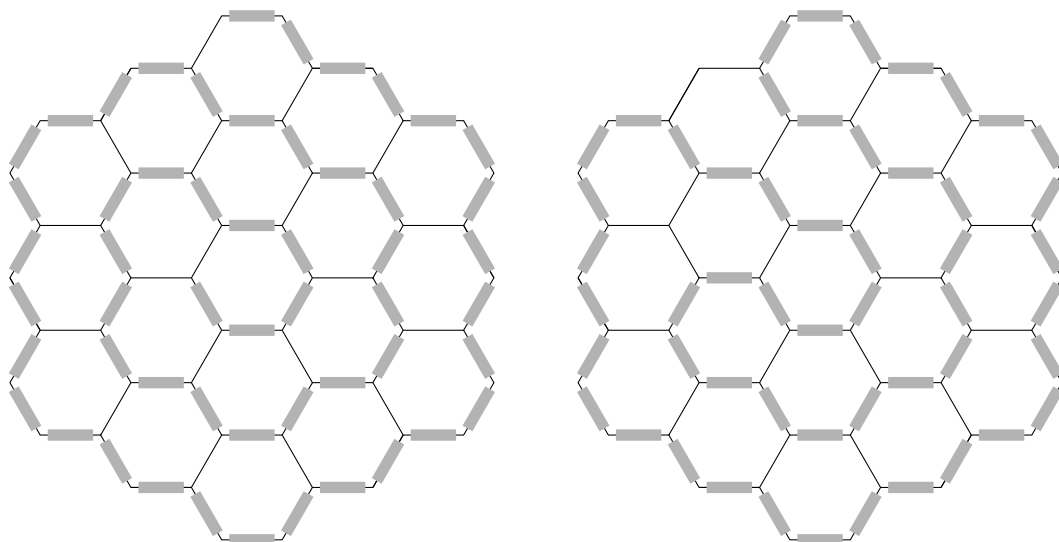
Noem de straal van de grotere cirkels R . De afstand tussen de middelpunten van twee horizontaal of verticaal naast elkaar gelegen cirkels is $R + 1$. De afstand tussen de middelpunten van twee diagonaal naast elkaar gelegen cirkels is $2R$. Uit de stelling van Pythagoras volgt nu dat

$$(R + 1)^2 + (R + 1)^2 = (2R)^2 \quad \text{ofwel} \quad 2R^2 + 4R + 2 = 4R^2$$

Als we dit door -2 delen, dan krijgen we $-R^2 - 2R - 1 = -2R^2$. Tellen we vervolgens $2R^2 + 2$ op aan beide zijden, dan krijgen we $R^2 - 2R + 1 = 2$. Dus $(R - 1)^2 = 2$. Omdat $R > 0$, volgt hieruit dat $R = \sqrt{2} + 1$.

Uitwerking opgave 3

Het is mogelijk om een ‘handelsroute’ te maken die alle hoekpunten aandoet, zie links-onder. De lengte van die handelsroute is 1 minder dan het aantal hoekpunten.



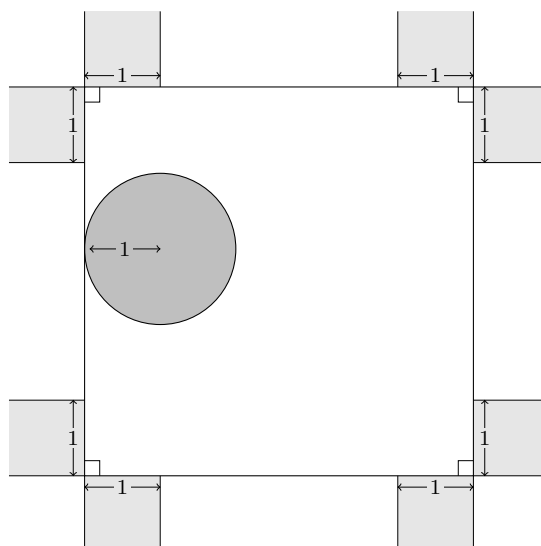
Het is ook mogelijk om een handelsroute te maken zonder begin- en eindpunt, zie rechts-boven. Voor zo’n cyclische handelsroute geldt dat de lengte gelijk is aan het aantal hoekpunten.

Maar voor een cyclische handelsroute geldt, dat er altijd wel een hoekpunt is dat niet op de handelsroute ligt. De handelsroute kan namelijk niet de hele rand van van het speelbord bevatten, tenzij de handelsroute precies de rand is, maar dan ontbreken er nog meer hoekpunten.

We dienen dus het aantal hoekpunten te tellen. De zeshoek in het midden heeft 6 hoekpunten. De ring eromheen heeft $3 \times 6 = 18$ hoekpunten. De buitenste rand heeft $5 \times 6 = 30$ hoekpunten. Dit geeft een totaal van 54 hoekpunten. Het antwoord is 1 minder, dus 53.

Uitwerking opgave 4

De cirkel rolt tot 1 meter van de hoek af, dus de omtrek van het vierkant is 8 meter langer dan tweemaal de omtrek van de cirkel.



De omtrek van het vierkant is daarom $2 \cdot 2\pi + 8 \cdot 1 = 4\pi + 8$ meter. De lengte van de zijde is dus $\pi + 2$ meter.

Uitwerking opgave 5

Merk op dat $ab \leq 20$. Omdat $ab - cd$ een kwadraat is, is $ab \geq cd$. Dus

$$ab + cd \leq 2 \cdot ab \leq 40$$

Omdat $ab + cd$ een kwadraat is, is $ab + cd \leq 36$.

Neem eerst aan dat $ab + cd = 36$. Dan is $ab - cd$ een even kwadraat. Als $ab - cd = 0$, dan is $ab = cd = 18$, dus

$$abcd = 1818$$

Als $ab - cd \geq 4$, dan is

$$ab = \frac{1}{2}(ab + cd) + \frac{1}{2}(ab - cd) \geq \frac{1}{2}(36 + 4) = 20$$

dus $ab = 20$, maar dat kan niet omdat dan $cd = 16$.

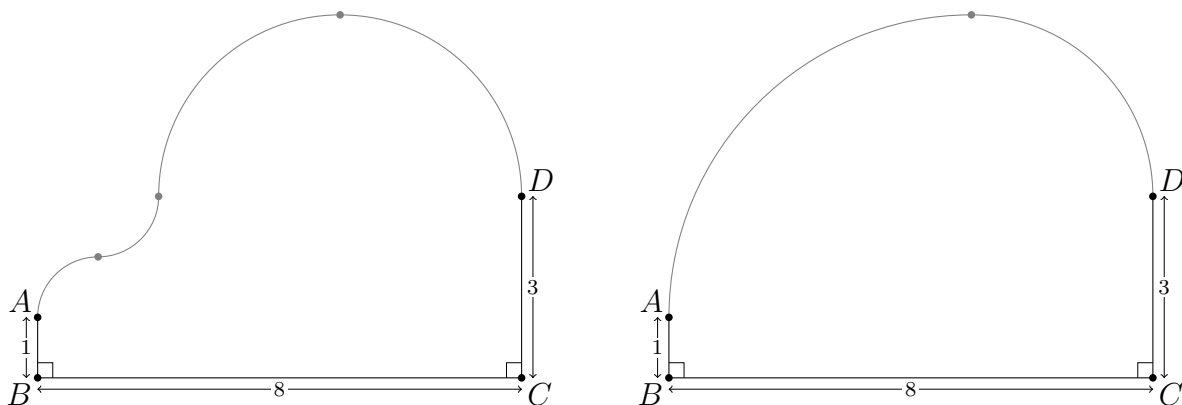
Neem vervolgens aan dat $ab + cd = 25$. Dan is $ab - cd$ een oneven kwadraat. Als $ab - cd = 25$, dan is $ab = 25$, maar dat kan niet. Dus $ab - cd \leq 9$ en

$$ab = \frac{1}{2}(ab + cd) + \frac{1}{2}(ab - cd) \leq \frac{1}{2}(25 + 9) = 17$$

Maar $17 < 18$. Verder hoeven we $ab + cd \leq 16$ niet meer te onderzoeken, want het is al duidelijk dat $abcd = 1818$ het grootste jaartal is dat voldoet.

Uitwerking opgave 6

De lengte van een kwartcirkel met straal r is $\frac{1}{2}\pi \cdot r$. De breedte van zo'n kwartcirkel is r . Omdat we een horizontale afstand van 8 moeten overbruggen, moet gelden dat de som van de stralen van de kwartcirkels ten minste 8 bedraagt. De som van de lengtes van de kwartcirkels is dan tenminste $\frac{1}{2}\pi \cdot 8 = 4\pi$.



Een kwartcirkel-weg van lengte 4π is inderdaad mogelijk. Hierboven zijn twee voorbeelden gegeven.

Uitwerking opgave 7

Omdat $1/a$ tussen 0 en 1 ligt, geldt

$$a = 1/a + 10$$

Dus $a^2 - 10a - 1 = 0$, oftewel

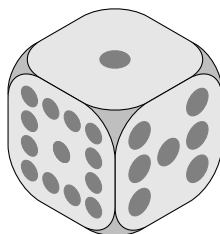
$$(a - 5)^2 = a^2 - 10a + 25 = 26$$

Omdat $a > 0$, is $a = 5 + \sqrt{26}$.

Uitwerking opgave 8

Stel dat we $1, 2, 3, \dots, n$ kunnen gooien met een gewone dobbelsteen en een speciale dobbelsteen. Om n te kunnen gooien, moet die speciale dobbelsteen een zijde met tenminste $n - 6$ ogen hebben. Maar zo'n zijde kun je niet gebruiken voor het gooien van $n - 6$ ogen: daarvoor heb je een andere zijde van die speciale dobbelsteen nodig. En wel een zijde met tenminste $n - 12$ ogen.

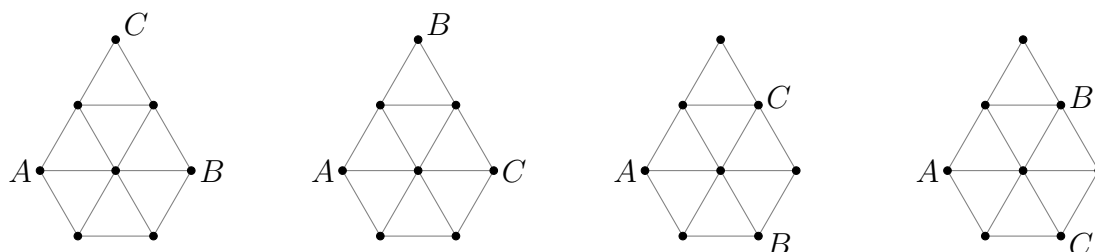
Voor $n \geq 20$ hebben we dus een zijde met tenminste 14 ogen en een zijde met tenminste 8 ogen nodig op onze speciale dobbelsteen, in totaal tenminste 22 ogen. Maar een gewone dobbelsteen heeft slechts 21 ogen, dus dat kan niet.



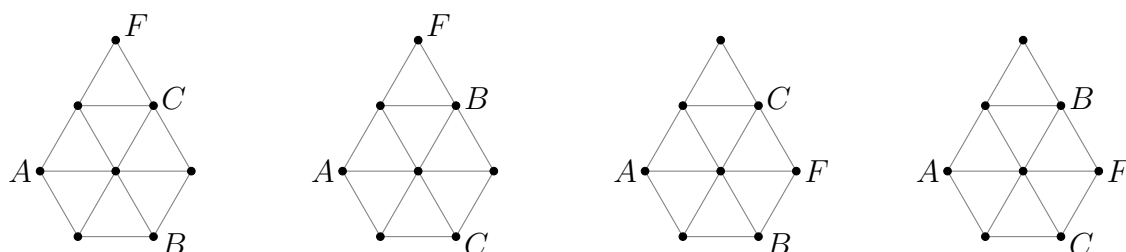
Voor $n = 19$ lukt het wel: een zijde met 13 ogen, een zijde met 7 ogen, en een zijde met 1 oog. Met die drie zijden en een gewone dobbelsteen kun je $2, 3, 4, \dots, 19$ gooien. 1 kan ook gegooid worden, omdat de overige drie zijden van de speciale dobbelsteen geen ogen meer kunnen hebben.

Uitwerking opgave 9

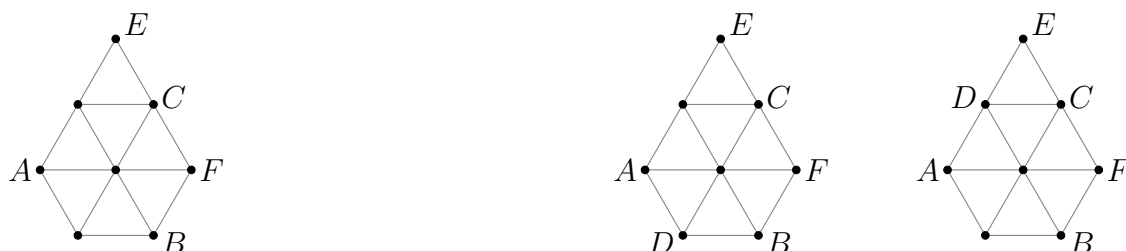
De kleinste afstand tussen twee punten is 1, dus uit $|GH| < |AB| = |AC| = |BC|$ volgt, dat driehoek ABC een gelijkzijdige driehoek is met zijde groter dan 1. Dit geeft vier mogelijkheden voor de posities van A , B en C :



De eerste twee mogelijkheden vervallen omdat $|AF| > |AC|$. Er zijn nu nog vier mogelijkheden voor de posities van A , B , C en F :



Alleen bij de derde mogelijkheid kan E zo geplaatst worden dat $|AF| < |BE|$:



Vervolgens kunnen we alleen nog concluderen dat de positie van D aan de buitenkant is. Het antwoord is dus E, C, F .

Uitwerking opgave 10

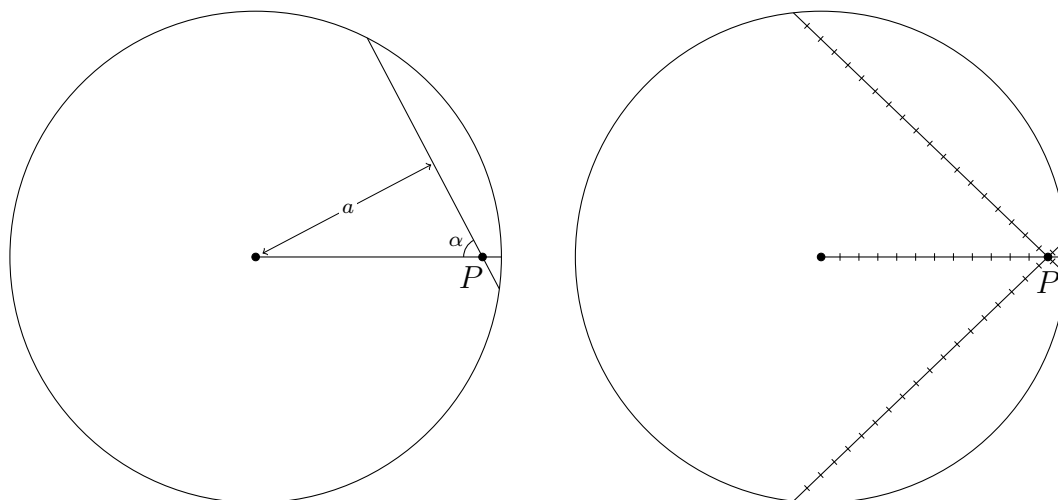
De langste koorde door P is de koorde die door P en het middelpunt van de cirkel gaat. De lengte van die koorde is 26.

De koorde door P die loodrecht op de langste koorde staat heeft lengte

$$2\sqrt{13^2 - 12^2} = 2\sqrt{25} = 10$$

Dit is ook de kortste koorde door P . Om dat in te zien, nemen we een willekeurige koorde door P . Laat α de hoek zijn tussen die koorde en de middellijn door P van de cirkel.

In de figuur linksonder zien we, dat de afstand a tussen die koorde en het middelpunt van de cirkel gelijk aan is $12 \sin \alpha$. Dus hoe kleiner hoek α , hoe kleiner de afstand tot het middelpunt van de cirkel, hoe langer de koorde. Hieruit volgt dat de koorde door P het kortst is als $\alpha = 90^\circ$. Dus de kortste koorde door P heeft inderdaad lengte 10.



Er is dus een koorde van lengte 10 en een koorde van lengte 26 door P . In de figuur rechtsboven zien we twee koorden door P van lengte 20. Uit het feit dat de sin-functie strikt stijgend is tussen 0° en 90° , kunnen we afleiden dat dit ook de enige twee koorden door P van lengte 20 zijn. Net zo geldt voor elk ander geheel getal n dat groter dan 10 en kleiner dan 26 is, dat er precies twee koorden door P van lengte n zijn.

Het totaal aantal koorden door P met een heeltallige lengte is dus $2 \cdot (26 - 10) = 32$.

Uitwerking opgave 11

Merk op dat

$$x^3 y - x y^3 = x y (x^2 - y^2) = x y (x + y) (x - y)$$

Stel dat twee van de factoren x , y , $x + y$ en $x - y$ deelbaar zijn door 3. Er zijn zes mogelijke keuzes van twee factoren. Door alle zes gevallen na te gaan, zie je dat alle vier factoren deelbaar zijn door 3. Het moeilijkste geval is dat $x - y$ en $x + y$ deelbaar zijn door 3. Omdat $2x = (x + y) + (x - y)$ en $2y = (x + y) - (x - y)$, zien we dat het moeilijkste geval ook geldt.

Maar 2016 heeft precies twee factoren 3, dus dat kan niet. Dus slechts een van de factoren x , y , $x + y$ en $x - y$ is deelbaar door 3. Die factor heeft net als 2016 ook twee factoren 3, en is dus deelbaar door 9. Dit geeft de volgende mogelijke waarden onder de twintig voor x , y , $x + y$ en $x - y$:

$$1, 2, 4, 7, 8, 9, 14, 16 \text{ en } 18 \quad (*)$$

We doen nu gevalsonderscheiding naar x :

$x \geq 16$. Dan is $x + y \geq 18$. Omdat $y + (x - y) = x \geq 16$, is $\max(y, x - y) \geq 8$. Maar $16 \cdot 18 \cdot 8 > 16 \cdot 18 \cdot 7 = 2016$, dus dit geval kan niet.

$x = 14$. Aangezien 2016 maar eenmaal deelbaar is door 7, is $y \neq 7$. Omdat $y + (x - y) = x = 14$, is er geen $y \neq 7$ zodat zowel y als $x - y$ in $(*)$ zitten. Dus dit geval kan evenmin.

$x = 9$. Dan is $y = 7$, want anders zitten y en $x + y = 9 + y$ niet allebei in (*). Dus $x + y = 16$ en $x - y = 2$. Dit is inderdaad een oplossing.

$x \leq 8$. Omdat een van de factoren x , y , $x + y$ en $x - y$ deelbaar is door 9, is $x + y = 9$. Dan is $y = 1$, want anders zitten $x = 9 - y$ en $x - y = 9 - 2y$ niet allebei in (*). Dus $x = 8$ en $x - y = 7$. Dit is echter geen oplossing.

Het antwoord is dus $x = 9$ en $y = 7$.

Uitwerking opgave 12

In het blik blijft steeds 25 milliliter achter, dus we kunnen ook de concentratie limonadesiroop in het blik minimaliseren. Als we de inhoud van 25 milliliter van het blik verdunnen met x milliliter water, neemt de concentratie siroop af met $25/(x + 25)$.

Het ligt voor de hand om de inhoud van de fles beide keren even veel te verdunnen. Daarom kiezen we x tussen -100 en 100 , en wel zo dat we de eerste keer $100 + x$ milliliter water toevoegen aan het blik, en de tweede keer $100 - x$. Dan krijgen we immers 200 milliliter aanmaaklimonade. Maar bovendien is het vermoeden dan, dat x het beste nul kan zijn. Als dat inderdaad zo is, dan maakt de keuze van x het rekenwerk gemakkelijker.

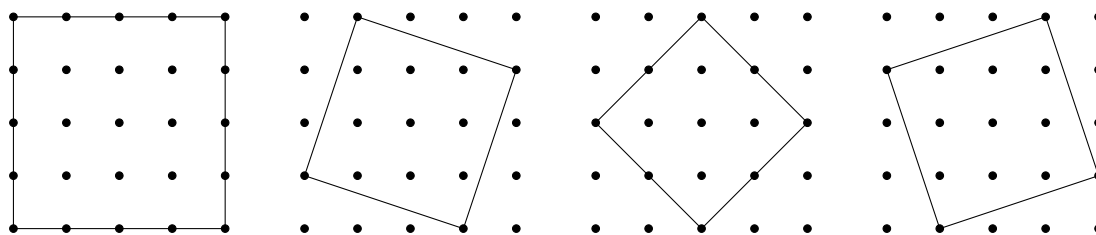
De concentratie siroop in het blik wordt zo uiteindelijk

$$\frac{25}{100 + x + 25} \cdot \frac{25}{100 - x + 25} = \frac{25}{125 + x} \cdot \frac{25}{125 - x} = \frac{1}{5 + \frac{1}{25}x} \cdot \frac{1}{5 - \frac{1}{25}x} = \frac{1}{25 - \frac{1}{625}x^2}$$

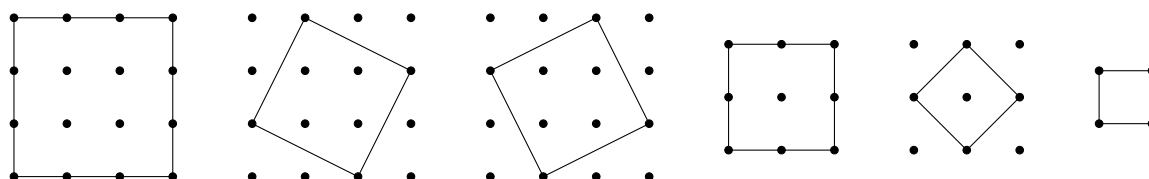
Dus $\frac{1}{25}$ is de laagst mogelijke concentratie die overblijft in het blik, en inderdaad is x dan nul. Dat komt neer op 1 milliliter siroop in 25 milliliter vocht, dus $25 - 1 = 24$ milliliter siroop komt in de aanmaaklimonade terecht.

Uitwerking opgave 13

We bekijken eerst alle vierkanten die de volle breedte van het rooster nodig hebben. Er zijn 4 van zulke vierkanten.



Vervolgens kijken we naar alle vierkanten die aan minder dan de volle breedte van het rooster genoeg hebben. Op verschuiving na zijn dat de volgende vierkanten.



Voor de eerste 3 vierkanten kan die verschuiving op 2×2 manieren worden gekozen. Voor de 2 vierkanten daarna kan de verschuiving op 3×3 manieren worden gekozen. Voor het laatste vierkant kan de verschuiving op 4×4 manieren worden gekozen.

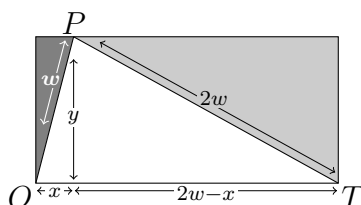
Het antwoord is dus

$$4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 4 = 4 + 12 + 18 + 16 = 50$$

Uitwerking opgave 14

We geven 3 uitwerkingen.

1 Quick and dirty Aangenomen dat de opgave (eenduidig) te beantwoorden is, maakt het kennelijk niet uit hoe de driehoek in de rechthoek ligt. Om het rekenwerk te vergemakkelijken, kijken we naar het geval, waarbij een van de zijden van de gelijkbenige driehoek samenvalt met een rechthoekszijde. Dit is een ontaard geval, want een van de twee lichtgrijze driehoeken is verdwenen.



Laat T de top van de gelijkbenige driehoek zijn. Noem de andere twee hoekpunten van de gelijkbenige driehoek O en P , en wel zo dat O , net als T , een hoekpunt van de rechthoek is.

Laat $w = |OP|$. Dan is $|OT| = 2w = |PT|$. Noem de afstand van P tot de korte rechthoekszijde tegenover T x . Noem de afstand van P tot de lange rechthoekszijde tegenover P y .

Uit de stelling van Pythagoras volgt, dat

$$|OP|^2 - x^2 = y^2 = |PT|^2 - (|OT| - x)^2$$

Dus

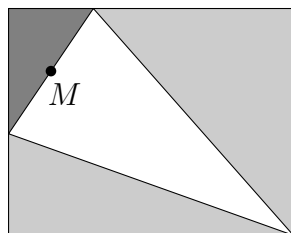
$$w^2 - x^2 = (2w)^2 - (2w - x)^2 = 4w^2 - (4w^2 - 4wx + x^2)$$

Hieruit volgt dat $w^2 = 4wx$, dus $w = 4x$. De oppervlakte van de donkergrijze driehoek is $\frac{1}{2}xy$. De oppervlakte van de lichtgrijze driehoek is

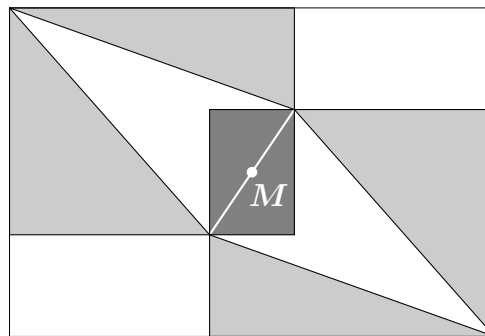
$$\frac{1}{2}(2w - x)y = \frac{1}{2}(8x - x)y = \frac{7}{2}xy$$

Dus de lichtgrijze driehoek is 7 maal zo groot als de donkergrijze driehoek.

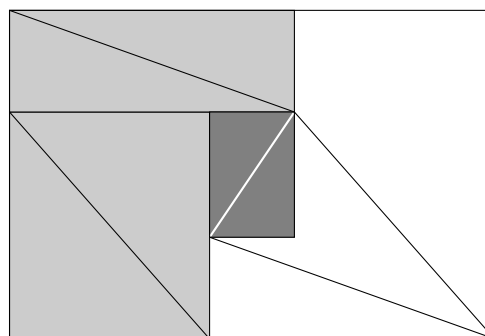
2 Meetkundig Laat M het midden van de basis van de gelijkbenige driehoek zijn.



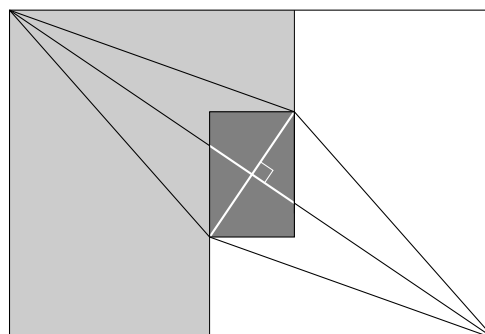
We verdubbelen de grijze driehoeken door hun spiegelbeelden ten opzichte van M toe te voegen. De figuur die zo ontstaat, vullen we aan met twee witte rechthoeken, zodat de rand van de figuur een grote rechthoek wordt.



Vervolgens herschikken we de lichtgrijze driehoeken. We zien nu dat het witte gedeelte van de grote rechthoek even groot is als het lichtgrijze gedeelte ervan.



Omdat de witte driehoek waarmee we begonnen gelijkbenig is, staat een van de diagonalen van de grote rechthoek loodrecht op een van de diagonalen van de kleine donkergrijze rechthoek.



De grote rechthoek en de kleine donkergrijze rechthoek zijn gelijkvormig, omdat ook de korte zijde van de een loodrecht staat op die van de ander, evenzo de lange zijde.

Noem de lengte van de basis van de gelijkbenige driehoek d . Uit de stelling van Pythagoras volgt, dat de lengte van de halve diagonaal van de grote rechthoek gelijk is aan

$$\sqrt{(2d)^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} \cdot d = \sqrt{16 - 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot d$$

De lengtes van de diagonalen van de kleine en de grote rechthoek zijn dus d en $\sqrt{15} \cdot d$. Dus de oppervlakte van de grote rechthoek is 15 maal zo groot als die van de kleine donkergrijze rechthoek.

De oppervlakte van de kleine rechthoek is 2, dus die van de grote rechthoek is 30. De oppervlakte van de grote rechthoek zonder de kleine rechthoek is 28, en de helft daarvan is lichtgrijs. Dus het lichtgrijze gedeelte van de grote rechthoek heeft oppervlakte 14, en dat is het dubbele van die van de 2 lichtgrijze driehoeken waarmee we begonnen. Het antwoord is dus 7.

Het algemene geval, waarbij de benen van de gelijkbenige driehoek niet 2 maal, maar $s > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ maal zo groot zijn als de basis, gaat net zo. De lengte van de halve diagonaal van de grote rechthoek is dan gelijk aan

$$\sqrt{(sb)^2 - (\frac{1}{2}b)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}} \cdot b = \sqrt{4s^2 - 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot b$$

De oppervlakte van de grote rechthoek is dan $4s^2 - 1$ maal zo groot als die van de kleine donkergrijze rechthoek, en het antwoord is dan $2s^2 - 1$.

3 Goniometrisch Net als aan het eind van de vorige uitwerking, leiden we een algemener resultaat af, namelijk met de benen $s > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ maal zo lang als de basis. Hiertoe herschalen we de driehoek en de rechthoek, zodat de driehoek twee zijden van lengte s en een zijde met lengte 1 krijgt. (De oppervlakte van de donkergrijze driehoek is nu nog maar ten hoogste $\frac{1}{4}$.)

Noem de oppervlakte van de lichtgrijze driehoeken a en b . Noem de oppervlakte van de donkergrijze driehoek c . We bewijzen dat

$$a + b = (2s^2 - 1)c$$

Het antwoord is dus $2s^2 - 1$, wat 7 oplevert als we $s = 2$ invullen.

We gebruiken de volgende formules voor de sinus en de cosinus:

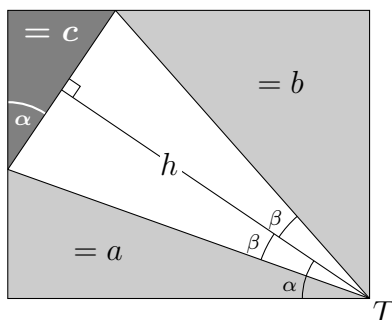
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (2)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (3)$$

$$\cos(2\beta) = 1 - 2(\sin(\beta))^2 \quad (4)$$

Laat T de top en h de hoogtelijn vanuit T van de gelijkbenige driehoek zijn. Neem voor α de hoek bij T tussen h en de rechthoekszijde van de driehoek met oppervlakte a . Neem voor β de hoek bij T tussen h en de schuine zijde van de driehoek met oppervlakte a .



Merk op dat β ook de hoek bij T tussen h en de schuine zijde van de driehoek met oppervlakte b is. Net zo is α ook een van de hoeken van de donkergrijze driehoek. Verder

geldt

$$\sin(\beta) = \frac{\frac{1}{2}}{s} = \frac{1}{2s}$$

Uit (3) volgt dat

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}s^2 \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}s^2 \sin(2\alpha - 2\beta) \\ b &= \frac{1}{2}s^2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{4}s^2 \sin(2\alpha + 2\beta) \\ c &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{4} \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

Dus vanwege (2) en (1) geldt

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}s^2 (\sin(2\alpha) \cos(2\beta) - \cos(2\alpha) \sin(2\beta)) \\ b &= \frac{1}{4}s^2 (\sin(2\alpha) \cos(2\beta) + \cos(2\alpha) \sin(2\beta)) \end{aligned}$$

Hieruit en uit (4) volgt, dat

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{1}{2}s^2 \sin(2\alpha) \cos(2\beta) = \frac{1}{2}s^2 \sin(2\alpha) (1 - 2(\sin(\beta))^2) \\ &= \frac{1}{2}s^2 \sin(2\alpha) (1 - 2(\frac{1}{2s})^2) = \frac{1}{2}s^2 \sin(2\alpha) (1 - \frac{1}{2s^2}) \\ &= \frac{1}{4}(2s^2 - 1) \sin(2\alpha) = (2s^2 - 1)c \end{aligned}$$

waarmee het gestelde bewezen is.

Dit probleem, voor willekeurige gelijkbenige driehoeken waarvan de tophoek kleiner dan 90° is, is bedacht door Leon van den Broek. Oplossing 2 komt van zijn hand.

Leon (1947–2013) heeft tijdens zijn leven grote bijdragen geleverd aan het wiskundeonderwijs. Verder heeft hij zich ingezet voor het populariseren van de wiskunde, met name onder de jeugd. Ook voor het wiskundetoernooi is hij van grote waarde geweest.

Uitwerking opgave 15

Schrijf $|P|$ voor het aantal uur dat persoon P op een dag werkt. Uit I volgt, dat $|A| = 3$, $|B| = 2$ en $|C| = 1$. Uit II volgt dat $|D| = 3$. Bovendien volgt uit II dat er twee oplossingen zijn voor B , C en D :

	Oplossing 1	Oplossing 2
12–2	B	
12–1 en 2–3		B
1–2		C
2–5	D	
3–6		D
5–6	C	

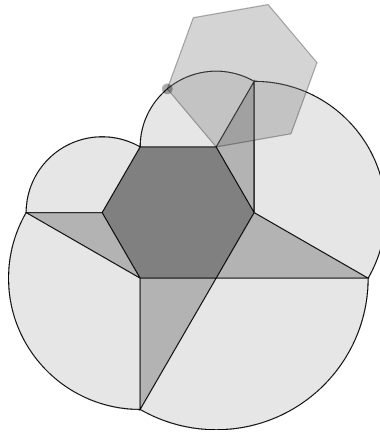
Omdat in oplossing 2 persoon B om 3 uur vertrekt, kan persoon E dan niet om 3 uur vertrekken. Dit laat zich niet rijmen met III, dus oplossing I blijft over. E kan alleen nog de persoon zijn die van 1 uur tot 2 uur werkt. Omdat bovendien $|A| = 3$ en $A \neq D$, hebben we de volgende oplossing:

	Oplossing 1
12-2	<i>B</i>
12-1 en 2-3	<i>F</i>
1-2	<i>E</i>
2-5	<i>D</i>
3-6	<i>A</i>
5-6	<i>C</i>

Het antwoord is dus *B, F, E, D, A, C*.

Uitwerking opgave 16

De kromme bestaat uit vijf cirkelbogen van 120 graden, met stralen 1, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{3}$ en 1.



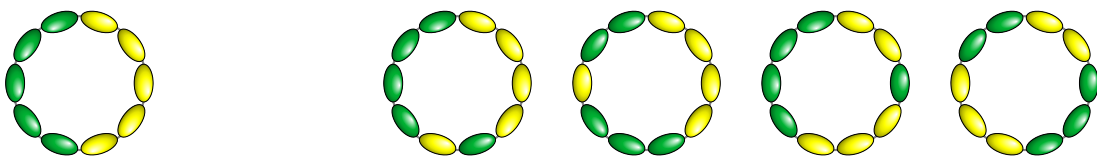
De oppervlakte van de met de vijf cirkelbogen overeenkomende ‘taartpunten’ bedraagt:

$$\frac{\pi}{3}(1^2 + \sqrt{3}^2 + 2^2 + \sqrt{3}^2 + 1^2) = \frac{\pi}{3} \cdot 12 = 4\pi$$

De oppervlakte van de zeshoek in het midden is gelijk aan de hoogte maal de gemiddelde breedte, dus $\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}$. Verder worden er nog vier driehoeken ingesloten door de kromme, die samen ook weer een zeshoek met zijde 1 vormen. Het antwoord is dus $4\pi + 3\sqrt{3}$.

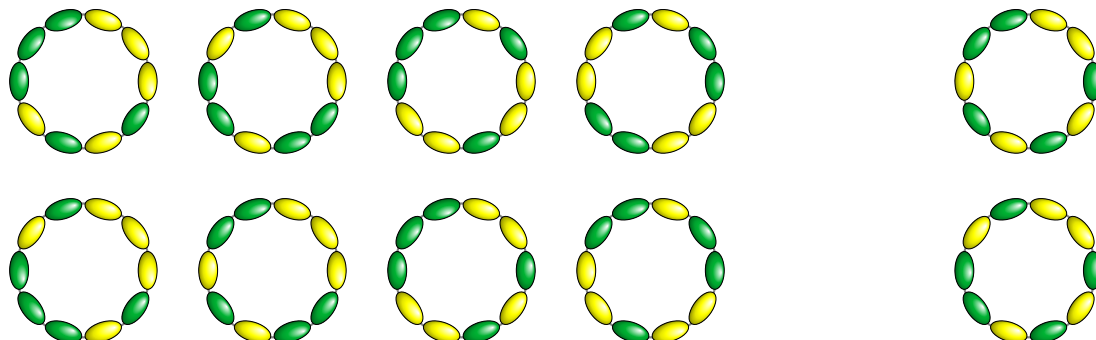
Uitwerking opgave 17

Als alle gele kralen achter elkaar zitten, zitten de groene kralen dat ook. Dit geeft 1 mogelijke armband.



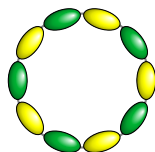
Als er twee groepen van achter elkaar zittende gele kralen zijn, zijn er ook twee groepen van achter elkaar zittende groene kralen. Dit geeft 4 mogelijke armbanden, overeenkomend met de 4 verdelingen van de kralen in twee gele groepen en twee groene groepen.

Als er drie groepen van achter elkaar zittende gele kralen zijn, zijn er ook drie groepen van achter elkaar zittende groene kralen. Dit geeft 8 mogelijke armbanden, namelijk 2 armbanden voor elk van de 4 verdelingen van de kralen in drie gele groepen en drie groene groepen.



Als er vier groepen van achter elkaar zittende gele kralen zijn, zijn er ook vier groepen van achter elkaar zittende groene kralen. Dit geeft 2 mogelijke armbanden, namelijk 2 armbanden voor de unieke verdelingen van de kralen in vier gele groepen en vier groene groepen.

Tenslotte kunnen de gele en groen kralen ook ‘om en om’ zitten.



Het antwoord is dus $1 + 4 + 8 + 2 + 1 = 16$.

Uitwerking opgave 18

Noem de breedte van het kleinste vierkant b en de breedte van het grootste vierkant B . Omdat de omtrek van de cirkelvormige ring en de vierkante ring gelijk zijn, is

$$2\pi R + 2\pi r = 4B + 4b$$

Omdat de oppervlakte van de cirkelvormige ring en de vierkante ring gelijk zijn, is

$$\pi R^2 - \pi r^2 = B^2 - b^2$$

Hieruit volgt dat

$$R - r = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi(R + r)} = \frac{B^2 - b^2}{2B + 2b} = \frac{B - b}{2} = \frac{B + b}{2} - b$$

Daarom is

$$R - r = \frac{B + b}{2} - b = \frac{4B + 4b}{8} - b = \frac{2\pi R + 2\pi r}{8} - b = \frac{2\pi(R + r)}{8} - b$$

Hieruit volgt dat

$$R = \frac{R-r}{2} + \frac{R+r}{2} = \left(\frac{\pi(R+r)}{2} - \frac{b}{2} \right) + \frac{R+r}{2}$$

Als we $R+r = 1600$ invullen, dan krijgen we

$$R = \left(\frac{1600\pi}{8} - \frac{b}{2} \right) + \frac{1600}{2} = 200\pi + 800 - \frac{1}{2}b$$

Dus $R < 200\pi + 800$ en elke $R < 200\pi + 800$ is mogelijk. Hieruit volgt dat de grootst mogelijke gehele R gelijk is aan $628 + 800 = 1428$.

Uitwerking opgave 19

Er zijn 7 opdelingen in driehoeken, waarbij alle vier diagonalen samenkomen in één punt (zie linksonder).



Er zijn ook 7 opdelingen in driehoeken, waarbij de vier diagonalen een ‘zigzag’ vormen (zie rechtsboven).

Er zijn 14 opdelingen in driehoeken, waarbij er een driehoek is waarvan alle zijden diagonalen van de zevenhoek zijn (zie linksonder).



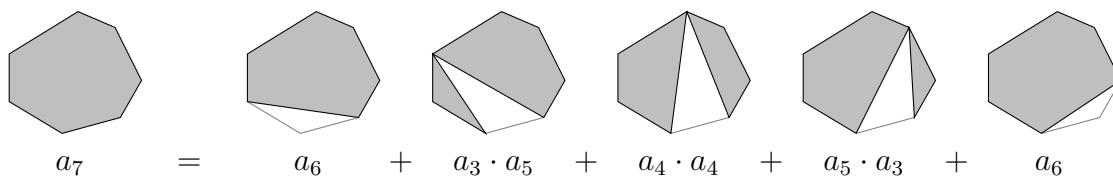
Tot slot zijn er nog 14 opdelingen in driehoeken, waarbij precies drie van de vier diagonalen samenkomen in een punt, zonder dat er een driehoek is waarvan alle zijden diagonalen van de zevenhoek zijn (zie rechtsboven).

In totaal zijn er dus $7 + 7 + 14 + 14 = 42$ opdelingen mogelijk.

Het aantal opdelingen in driehoeken kunnen we ook anders uitrekenen. Schrijf a_n voor het aantal opdelingen van een convexe n -hoek in $n - 2$ driehoeken.

We gaan a_7 bepalen. Kies een willekeurig zijde van een convexe zevenhoek en deel de zevenhoek op in driehoeken. De gekozen zijde is ook de zijde van een van de 5 driehoeken waarin de zevenhoek is opgedeeld. We knippen deze driehoek weg. Vervolgens blijven er een of twee kleinere veelhoeken over, die op hun beurt ook weer zijn opgedeeld in driehoeken.

Door alle gevallen na te gaan, krijgen we zo de volgende gelijkheid.



Meer algemeen geldt, dat $a_3 = 1$ en

$$a_n = a_{n-1} + a_3 \cdot a_{n-2} + a_4 \cdot a_{n-3} + \cdots + a_{n-3} \cdot a_4 + a_{n-2} \cdot a_3 + a_{n-1}$$

voor alle gehele $n > 3$. We kunnen hiermee a_n uitrekenen voor alle n .

n	a_n	n	a_n
3	1	10	1430
4	2	11	4862
5	5	12	16796
6	14	13	58786
7	42	14	208012
8	132	15	742900
9	429	16	2674440

Uitwerking opgave 20

Voor getallen a, b, n betekenen de volgende vergelijkingen hetzelfde:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n} \quad \frac{b+a}{ab} = \frac{1}{n} \quad (a+b)n = ab$$

$$ab - (a+b)n + n^2 = n^2 \quad (a-n)(b-n) = n^2$$

Dus als we $a' := a - n$ en $b' := b - n$ definiëren, dan betekent

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n} \quad \text{hetzelfde als} \quad a' b' = n^2$$

We kunnen daarom ook de paren a', b' tellen waarvoor $a' < b'$ en $a' b' = n^2$.

Neem $n = 2016$. Omdat $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$, heeft 2016^2

$$(10+1)(4+1)(2+1) = 165$$

delers. Daarvan zijn k delers kleiner dan 2016, $164 - k$ delers groter dan 2016, en de laatste deler is 2016 zelf. We kunnen a' dus op k manieren kiezen; b' ligt vervolgens vast en is voor elke a' anders.

Maar we kunnen ook b' op $164 - k$ kiezen, dus $k = 164 - k$. Hieruit volgt dat $k = 82$, en dat is ook het antwoord.