



Uitwerking opgave 1

Noem het getal dat gevormd wordt door de laatste twee cijfers van het geboortjaar van Arnoud a en de leeftijd van Arnoud b . Dan is $a + b = 2017 - 1900 = 117$, dus $b \leq 117$. Verder is $b \geq 2017 - 1980 = 37$, dus

$$36 < b < 121$$

Omdat b een kwadraat is, is b een van de getallen 49, 64, 81 en 100. Aangezien a ook een kwadraat is, en

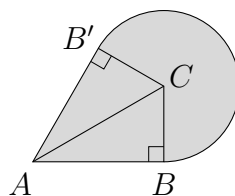
$$117 - 49 = 68 \quad 117 - 64 = 53 \quad 117 - 81 = 36 \quad \text{en} \quad 117 - 100 = 17$$

is $a = 36$ en $b = 81$.

(Niet alleen 36, maar ook 1936 in zijn geheel, is een kwadraat. Dus naast 117 is ook 2017 te schrijven als de som van twee kwadraten. Een priemgetal is precies de som van twee kwadraten, als zijn rest bij deling door 4 ongelijk aan 3 is. 2017 is zo'n priemgetal, en $117 = 13 \cdot 9$ is het product van zo'n priemgetal en een kwadraat. Op het internet kun je een algemene beschrijving vinden van de getallen die te schrijven zijn als de som van twee kwadraten.)

Uitwerking opgave 2

Noem de positie van de spijker A en de twee plekken waar het koord nog net tegen het wiel zit B en B' . Noem het middelpunt van het wiel C .



Omdat het koord strakgetrokken is, ligt lijnstuk AB op de raaklijn te B van het wiel. Dus hoek ABC is loodrecht. Schrijf $|L|$ voor de lengte van lijnstuk L . Uit de stelling van Pythagoras volgt dat

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 - |BC|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

We kunnen driehoek ABC en driehoek $AB'C$ zo tegen elkaar leggen, dat we een gelijkzijdige driehoek met zijde 2 krijgen. Hieruit volgt dat hoek BCA gelijk is aan 60

graden. Hoek $B'CA$ is ook gelijk aan 60 graden, dus de cirkelboog van het koord is $360 - 60 - 60 = 240$ graden. Het antwoord is dus

$$|AB| + |AB'| + \frac{\pi}{180} \cdot 240 = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$

Uitwerking opgave 3

Het cijfer 5 in de rechthoek linksboven kan op 6 plekken staan. Vervolgens kan het cijfer 5 in de rechthoek rechtsboven nog op 3 plekken staan.

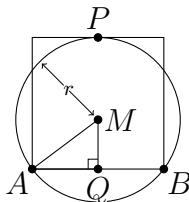
Links in het midden kan het cijfer 5 nog op 4 plekken staan. Hierna kan rechts van het midden het cijfer 5 nog op 2 plekken staan.

Linksonder kan het cijfer 5 vervolgens nog op 2 plekken staan. De plek van het laatste cijfer 5 ligt vast.

Het antwoord is dus $6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 288$.

Uitwerking opgave 4

Laat M het middelpunt en r de straal van de cirkel zijn. Laat A en B de hoekpunten van het vierkant zijn waar de cirkel door gaat. Laat P het midden van de vierkantszijde zijn waar de cirkel door gaat, en Q het midden van de tegenoverliggende vierkantszijde.



Schrijf $|L|$ voor de lengte van lijnstuk L . Dan is $|AQ| = 1$, $|QM| = 2 - r$, en $|AM| = r$. Uit de stelling van Pythagoras volgt dat

$$\begin{aligned} r^2 &= |AM|^2 = |AQ|^2 + |QM|^2 \\ &= 1^2 + (2 - r)^2 \\ &= 1 + 4 - 4r + r^2 \end{aligned}$$

wat neerkomt op $4r = 5$.

Uitwerking opgave 5

Laat r de straal van de spoel zijn. De oppervlakte van de zijkant van de spoel, inclusief grijpgat, is $2\pi r^2$ vierkante mm, en met alle band erop is het $2\pi(r + 12)^2$ vierkante mm. Met de helft van alle band erop is de oppervlakte van de zijkant van de spoel $2\pi(r + 7)^2$

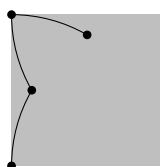
vierkante mm. Dus

$$\begin{aligned}
 2\pi(r+12)^2 + 2\pi r^2 &= 2\pi(r+7)^2 + 2\pi(r+7)^2 \\
 (r+12)^2 + r^2 &= 2(r+7)^2 \\
 2r^2 + 24r + 144 &= 2r^2 + 28r + 98 \\
 4r &= 46 \\
 2r &= 23
 \end{aligned}$$

De diameter van de spoel is daarom 23 mm.

Uitwerking opgave 6

De driehoek wordt viermaal gekanteld, maar hoekpunt P wordt bij slechts drie van de vier kantelingen verplaatst.



De verplaatsing van P is telkens over een boog van $90 - 60 = 30$ graden en straal 2. Het antwoord is dus

$$3 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \pi$$

Uitwerking opgave 7

Laat $p = ab5 \times ab6$. Het eennalaatste cijfer van p is het laatste cijfer van

$$\frac{5 \cdot 6}{10} + 5b + 6b = 11b + 3 = 10b + b + 3$$

dus $b = 7$.

Het tweenaalaste cijfer van p is het laatste cijfer van

$$\frac{5 \cdot 6}{100} + \frac{5b + 6b}{10} + b^2 + 5a + 6a = 8 + 49 + 11a = 10(a + 5) + a + 7$$

dus $a = 3$.

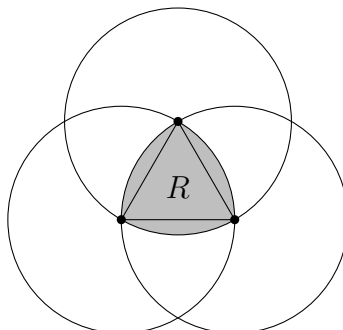
Je kunt a ook als volgt vinden. Omdat p deelbaar is door $5^3 = 125$ en $ab6$ niet deelbaar is door 5, is $ab5$ deelbaar door 125. Dus $a = 3$ of $a = 8$. Omdat p deelbaar is door $2^3 = 8$ en $ab5$ niet deelbaar is door 2, is $ab6$ deelbaar door 8. Dus $a \neq 8$ en $a = 3$.

Uitwerking opgave 8

Als de cirkel met straal 1 om een punt P alleen de *hoekpunten* van de gelijkzijdige driehoek bevat, bevat hij de rest van de gelijkzijdige driehoek ook. Dus het gebied R

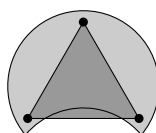
van radarpunten bestaat uit de punten P die tot elk van de drie hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek afstand ten hoogste 1 hebben.

Hieruit volgt dat R de doorsnede is van de drie cirkels met straal 1 om de hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek.



De totale omtrek van R is die van een halve cirkelboog met straal 1, dus het antwoord is π .

(Wat hierboven voor een cirkel geldt, geldt niet voor elke figuur. Onderstaande figuur bevat de hoekpunten van een driehoek, maar niet de rest ervan.)



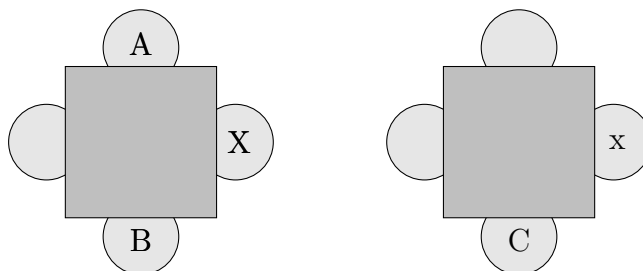
Dit is omdat een cirkel *convex* is en bovenstaande figuur niet. Voor meer informatie: zoek op het internet op ‘convexe verzameling’.)

Uitwerking opgave 9

Noem de rechterbuur van B X en de levenspartner van X x .

Als X gelijk aan b is, is de linkerbuur van b getrouwd met de linkerbuur van A , wat niet het geval is. Als X gelijk aan a is, is de rechterbuur van B getrouwd met de rechterbuur van a , wat evenmin het geval is. Dus X is ongelijk aan a en aan b .

Dus x is ongelijk aan A en aan B . Omdat C een buur is van x , zijn A en B niet allebei burens van x . Hieruit volgt dat x niet aan de tafel van A en B zit.

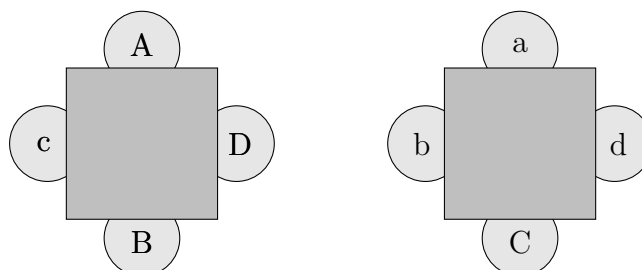


Verder zien we dat de echtparen Xx en Dd hetzelfde zijn.

Omdat X de linkerbuur van A is, is x evenmin de linkerbuur van b of c . Dus b en c zijn beide niet de rechterbuur van x . Daarom moet de rechterbuur van x wel a zijn.

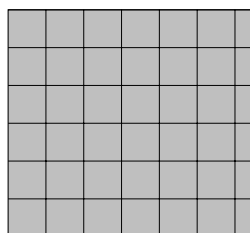
Dus aC is net als AB een bridgepaar. Verder vormt zowel x als X een bridgepaar met b of c . Dus bd en cD zijn de andere twee bridgeparen.

Een van de twee mogelijke bezettingen is de volgende:



Uitwerking opgave 10

Een vierkant van 6 bij 6 heeft oppervlakte 36 en is dus niet groot genoeg. De omtrek van het vierkant van 6 bij 6 is 24, dus 24 lijkt niet haalbaar als mogelijke omtrek.



25 is wel haalbaar als omtrek: een rechthoek met zijden 6 en $6\frac{1}{2}$ heeft oppervlakte 39 en omtrek 25. (37 en 38 zijn ook mogelijk als oppervlakte bij een omtrek van 25, maar de lengten van de zijden zijn dan geen mooie getallen.)

We moeten dus nog even aantonen dat een rechthoek met omtrek ≤ 24 ten hoogste oppervlakte 36 heeft. Welnu, voor een rechthoek geldt, dat we x en y zo kunnen kiezen dat $x - y$ en $x + y$ de lengten van de zijden van de rechthoek zijn. De omtrek van de rechthoek is dan $4x$ en de oppervlakte is dan $x^2 - y^2$. En als $4x \leq 24$, is $x \leq 6$ en $x^2 - y^2 \leq x^2 \leq 36$.

Uitwerking opgave 11

De grootste matroesjka wordt altijd van tafel genomen. Elk van de overige 6 matroesjka's kan nog op tafel staan, maar kan ook van tafel zijn genomen. Dit geeft $2^6 = 64$ mogelijkheden voor de collectie van matroesjka's die van tafel zijn genomen.

Het is echter niet mogelijk dat alleen de grootste matroesjka van tafel is genomen, want in het begin worden er 2 matroesjka's van tafel gepakt. Dus er zijn $64 - 1 = 63$ mogelijkheden voor de collectie van matroesjka's op Sarah's schoot.

Uitwerking opgave 12

Omdat de linkerkant van de vergelijkingen niet negatief kan zijn, is de rechterkant van de vergelijkingen ook niet negatief, dus $z \geq 1$, $x \geq 1$ en $y \geq 1$.

Als we de vergelijkingen kwadrateren en bij elkaar optellen, dan krijgen we

$$(x^2 - y) + (y^2 - z) + (z^2 - x) = (z - 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

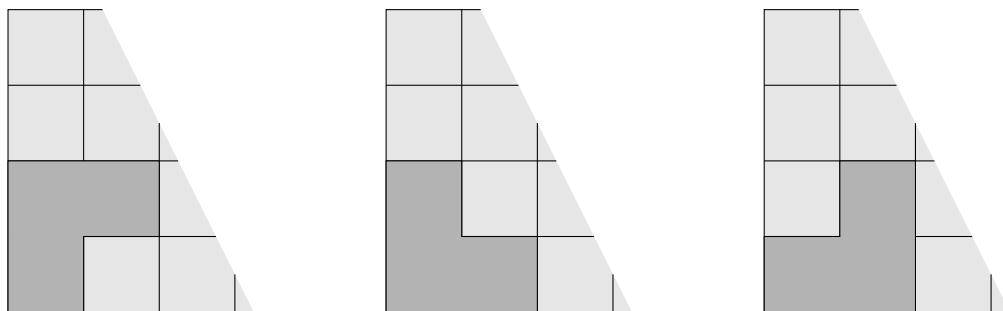
wat op hetzelfde neerkomt als

$$x + y + z = 3$$

Hieruit volgt dat $x = y = z = 1$.

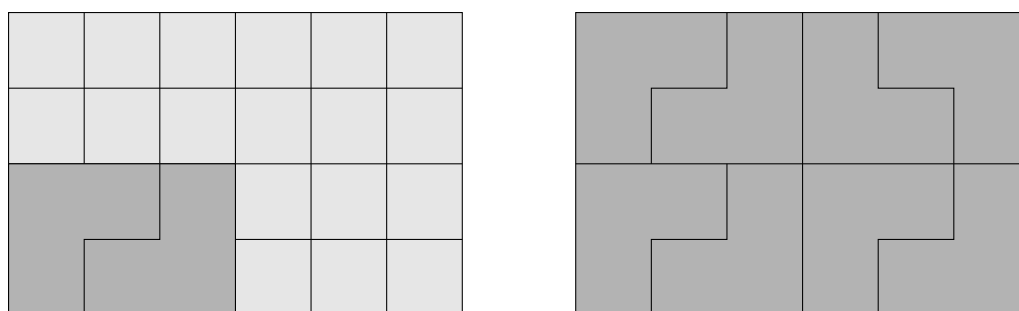
Uitwerking opgave 13

De steen in de hoek linksonder kan in principe op 3 manieren worden gelegd.



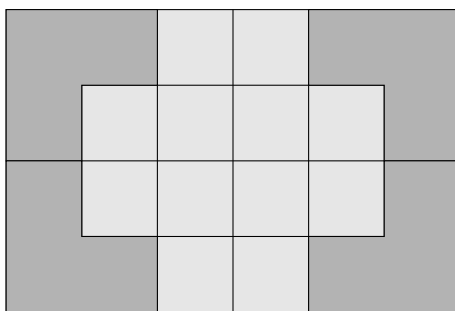
Maar bij de laatste manier kan de rechthoek niet meer worden voltooid.

Bij de eerste manier kan dat wel, en het rechthoekdeel van 3 bij 2 linksonder wordt dan bedekt met precies twee hele stenen. De rechthoekdelen van 3 bij 2 linksboven, rechtsonder en rechtsboven worden dan ook bedekt met precies twee hele stenen.

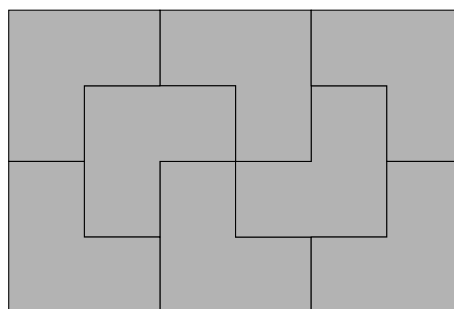
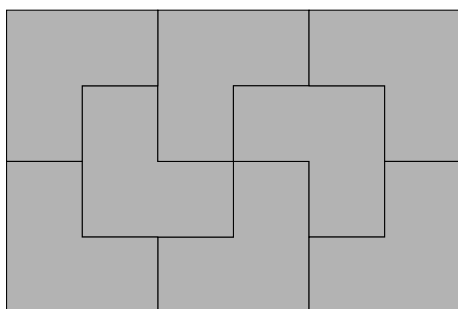


Het bedekken van de 4 rechthoekdelen met elk twee hele stenen kan op $2^4 = 16$ manieren.

Voor een andere betegeling van de rechthoek moeten de hoekstenen als volgt liggen.



Er zijn nog 2 andere betegelingen van de rechthoek, dus in totaal $16+2 = 18$ betegelingen.



Uitwerking opgave 14

Uit de stelling van Pythagoras volgt, dat de lengte van DM gelijk is aan 5. De lengte van AM is ook 5, dus de oppervlakte van driehoek AMD is $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$. De oppervlakte van vierkant $ABCD$ is viermaal zo groot, dus het antwoord is 40.

Uitwerking opgave 15

Het aantal jaartallen tussen 2017 en 3000 is

$$2999 - 2017 = 982$$

Een rij van 982 getallen heeft ongeveer $\sqrt{982}$ veelvouden van $\sqrt{982}$, en $\sqrt{982}$ is ongeveer 31. 31 lijkt dus een goede eerste gok.

We tonen aan dat het antwoord a op deze vraag inderdaad 31 is. Merk op dat een rij van $31a$ opeenvolgende gehele getallen bevat precies 31 veelvouden van a bevat.

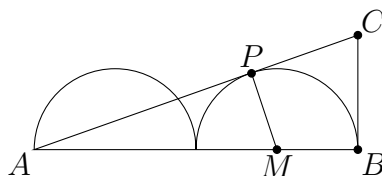
Neem eerst aan dat $a \geq 32$. Omdat $982 \leq 992 = 31 \cdot 32 \leq 31a$, zijn er ten hoogste 31 veelvouden van a tussen 2017 en 3000. Tegenspraak, dus $a \leq 31$.

Neem vervolgens aan dat $a \leq 30$. Omdat $982 \geq 930 = 31 \cdot 30 \geq 31a$, zijn er ten minste 31 veelvouden van a tussen 2017 en 3000. Tegenspraak, dus $a \geq 31$.

2015 en 3007 zijn veelvouden van 31, en daartussen en tussen 2017 en 3000 zitten inderdaad 31 veelvouden van 31. (Maar als we het getal 2017 in de vraagstelling zouden vervangen door 2014, dan heeft de vraag geen geldig antwoord meer.)

Uitwerking opgave 16

Noem het raakpunt van AC met een van beide cirkels P , en laat M het middelpunt zijn van de cirkel met raakpunt P .



Schrijf $|L|$ voor de lengte van lijnstuk L . Dan is $|AM| = 3$ en $|PM| = 1$. Verder is hoek APM een rechte hoek, dus volgt uit de stelling van Pythagoras dat

$$|AP| = \sqrt{|AM|^2 - |PM|^2} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8}$$

Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek APM , dus

$$\frac{|BC|}{4} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|PM|}{|AP|} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

Hieruit volgt dat $|BC| = \sqrt{2}$.

Uitwerking opgave 17

8 van de getallen van 1 tot en met 17 zijn even, en 3 van de getallen van 1 tot en met 17 zijn deelbaar door 5. Dus het getal

$$a = \frac{17!}{2^8 \cdot 5^3} = \frac{17!}{32000}$$

is geheel. Verder wordt

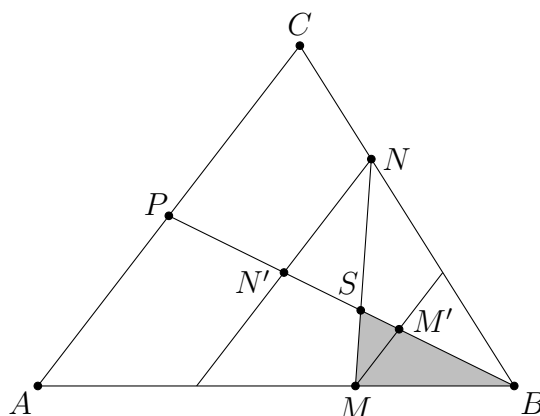
$$32a = \frac{17!}{1000}$$

gevormd door de eerste 12 cijfers van $17!$, en zijn cijfer 13, 14 en 15 gelijk aan 0.

Omdat $32a$ en 1000 deelbaar zijn door 8, is de rest b bij deling door 1000 van $32a$ ook deelbaar door 8. Aangezien het 10^e en het 11^e cijfer van $32a$ gelijk zijn aan respectievelijk 0 en 9, ligt b tussen 89 en 100, dus $b = 96$. Het laatste cijfer van $32a$ is daarom 6, en met de drie nullen erachter krijgen we 6000.

Uitwerking opgave 18

De figuur in de opgave suggereert, dat S het punt op lijnstuk MN is dat tweemaal zo ver van N af ligt als van M . Neem even aan dat dat inderdaad zo is. Dan is de hoogte van driehoek BMS een derde van de hoogte van driehoek BMN , welke twee derde is van de hoogte van driehoek ABC . En de breedte van driehoek BMS is een derde van de breedte van driehoek ABC . Dat leidt tot de conclusie dat de oppervlakte van driehoek BMS $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$ bedraagt.



We tonen aan dat S inderdaad het punt op lijnstuk MN is dat tweemaal zo ver van N af ligt als van M . Kies voor M' het punt op lijnstuk BP dat tweemaal zo ver van P ligt als van B , en voor N' het punt op lijnstuk CP dat tweemaal zo ver van C ligt als van P . Schrijf $|L|$ voor de lengte van lijnstuk L . Dan is

$$|NN'| = \frac{2}{3}|CP| = \frac{2}{3}|AP| = 2|MM'|$$

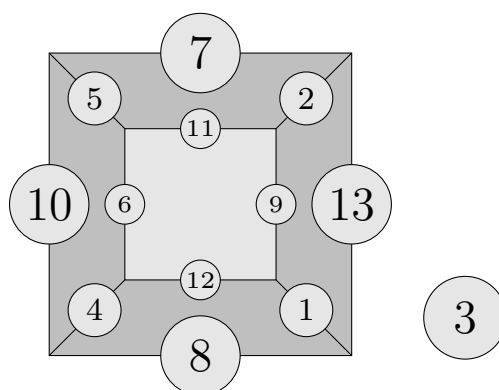
Omdat driehoek $NN'S$ gelijkvormig is met driehoek $MM'S$, is ook $|NS| = 2|MS|$.

Uitwerking opgave 19

Laat s de som van de getallen van de 3 ribben die bij een hoekpunt samenkomen zijn. Omdat er 8 hoekpunten zijn, en elke ribbe 2 hoekpunten als uiteinde heeft, is de som van de getallen van alle 12 ribben gelijk aan $\frac{8}{2}s = 4s$.

De som van de getallen die op de ribben voorkomen, moet dus een viervoud zijn. Dit is blijkbaar zo als alle getallen van 1 tot en met 13 behalve 7 meedoen, en daarom ook zo als alle getallen van 1 tot en met 13 behalve $7 - 4 = 3$ meedoen.

Het antwoord kan dus alleen 3 zijn, en 3 is inderdaad mogelijk.



Uitwerking opgave 20

Noem een tweetal getallen waarvan de een de ander deelt een *schakel*, en een rij waarvan elk tweetal opeenvolgende getallen een schakel vormt een *schakelrij*.

We kunnen de getallen $4, 5, \dots, 15$ verdelen over 6 schakelrijen, en wel zó dat elke schakel tussen de getallen $4, 5, \dots, 15$ wordt gebruikt.

$$8, 4, 12, 6 \quad 10, 5, 15 \quad 7, 14 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad (*)$$

Door de getallen 1, 2 en 3 toe te voegen, kunnen we de 4 rijtjes uit (*) met grootste som verbinden tot een grote schakelrij.

$$8, 4, 12, 6, \quad 3, \quad 15, 5, 10, \quad 2, \quad 14, 7, \quad 1, \quad 13$$

9 en 11 blijven over, dus de som van bovenstaande schakelrij is $120 - 9 - 11 = 100$.

Om te bewijzen dat de gegeven schakelrij de grootst mogelijke som heeft, doen we bovenstaande constructie in feite in omgekeerde volgorde, dus als een destructie.

Stel dat we een schakelrij hebben van de getallen $1, 2, 3, \dots, 15$ met som s . Door de getallen 1, 2 en 3 weg te halen, valt deze schakelrij uiteen in ten hoogste 4 kleinere schakelrijen, waarvan de totale som gelijk is aan $s - 6$.

Deze kleinere schakelrijen zijn deelschakelrijen van die in (*), omdat in (*) alle schakels tussen de getallen $4, 5, \dots, 15$ worden benut. Dus de totale som $s - 6$ is ten hoogste die van de 4 rijtjes met de grootste som van (*), en $s \leq 120 - 9 - 11 = 100$.