
START WISKUNDE-ESTAFETTE 2008

Je hebt 60 minuten voor 20 opgaven.

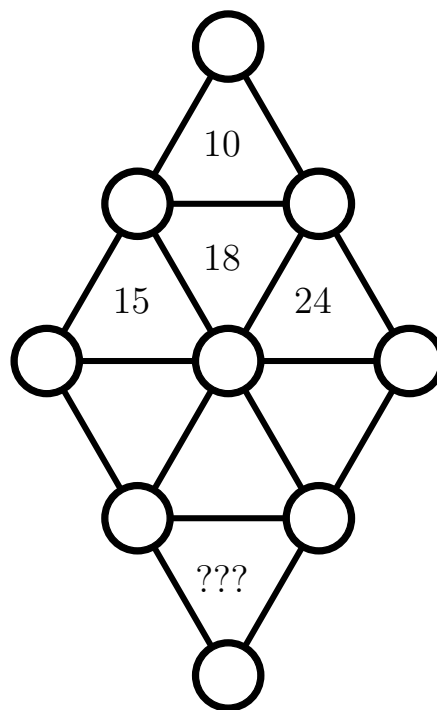
Het totaal aantal te behalen punten is 500.

Estafette-opgave 1 (30 punten, rest 470 punten)

Uitgeveegd

In de cirkeltjes heeft iemand de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 geschreven, en in elk driehoekje de som van de cijfers die in de hoekpunten staan.

Vervolgens heeft iemand de cijfers in de cirkeltjes uitgeveegd, en ook de getallen in de onderste vier driehoekjes.

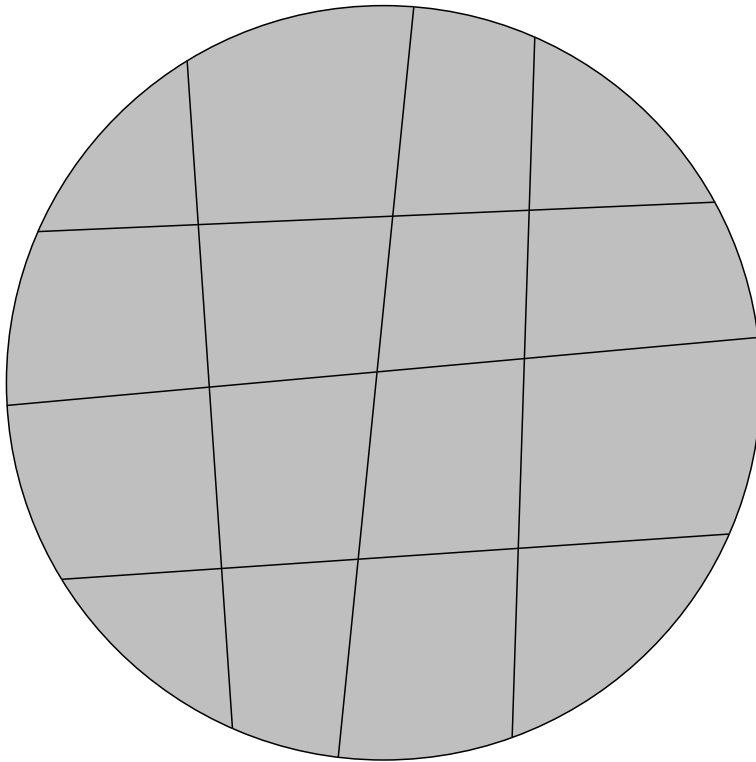


Welk getal heeft in het onderste driehoekje gestaan?

Estafette-opgave **2** (20 punten, rest 450 punten)

Taart

Een cirkelvormige taart is door zes rechte snedes verdeeld in zestien stukken:



Iemand maakt er nog twee rechte snedes bij.

Wat is het grootste aantal stukken waarin de taart dan verdeeld kan zijn?

Estafette-opgave 3 (20 punten, rest 430 punten)

Schrappen

Schrap cijfers zó dat er in elke rij en elke kolom hoogstens één 1, één 2, één 3, en één 4 overblijven.

3	2	2	1	4
1	1	4	3	4
2	2	5	4	1
3	4	3	2	3
2	1	3	1	4

Wat is het kleinste aantal cijfers dat je moet schrappen?

Estafette-opgave 4 (20 punten, rest 410 punten)

De schaakkubus

Op elk van de zes zijvlakken van een kubus wordt een schaakbord geschilderd: een patroon van 8×8 witte en zwarte vierkantjes zodanig dat twee vierkantjes die aan elkaar grenzen een verschillende kleur hebben. Het zal voorkomen dat via een ribbe van de kubus een paar witte vierkantjes aan elkaar grenzen, of een paar zwarte.

Wat is het minimale aantal paren vierkantjes van dezelfde kleur?

Estafette-opgave 5 (30 punten, rest 380 punten)

Goten en richels

Een vel papier wordt acht keer gevouwen. De vouwlijnen zijn **A**, **B**, **C**, **D**, **K**, **L**, **M**, **N**, maar niet in deze volgorde. Als het papier weer opengevouwen wordt, zie je dat elk stuk vouwlijn een goot (dalvouw) of een richel (bergvouw) is. In onderstaande figuur is dit aangegeven als **G** respectievelijk **R**.

		A		B		C		D		
			G		G		G		G	
K		G		R		R		R		R
			G		R		R		R	
L		G		R		R		R		G
			G		G		G		R	
M		G		R		G		R		G
			G		G		G		R	
N		G		R		R		G		R
			G		R		G		R	
		A		B		C		D		

In welke volgorde zijn de acht lijnen gevouwen?

Noteer je antwoord als bijvoorbeeld **NMLKDCBA**.

Estafette-opgave 6 (30 punten, rest 350 punten)

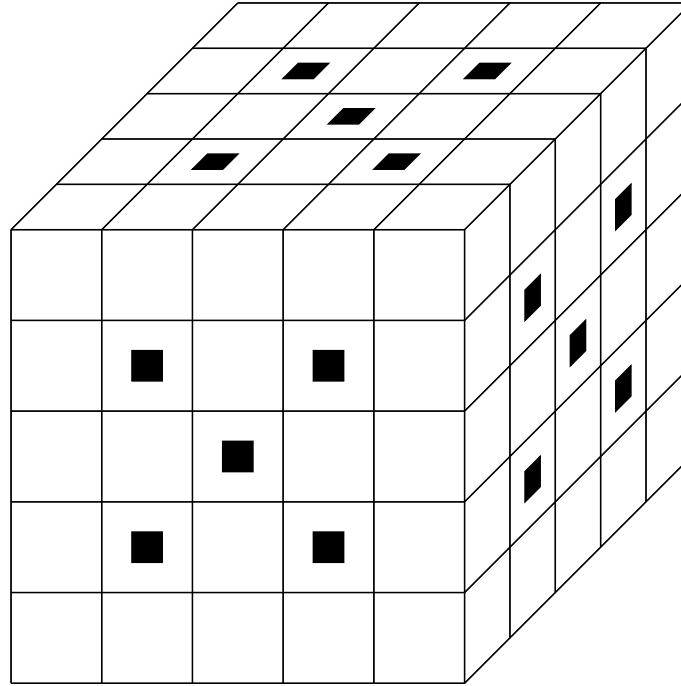
Vijven en zessen

In hoeveel van de getallen tussen 3000 en 4000 komen meer vijven dan zessen voor?

Estafette-opgave 7 (20 punten, rest 330 punten)

Boren

Een grote kubus bestaat uit $5 \times 5 \times 5$ kleine kubusjes. In elk zijvlak worden 5 gaten geboord, loodrecht op het zijvlak en dwars door de kubus heen. De plaatsen waar zo'n gat komt zijn aangegeven in onderstaande tekening.



Hoeveel kleine kubusjes blijven onaangetast?

Estafette-opgave 8 (20 punten, rest 310 punten)

Voetbal

Duitsland, Nederland, België en Luxemburg vormen een groep in de eerste ronde van een wereldkampioenschap voetbal. Ze spelen allemaal een keer tegen elkaar. De winnaar van een wedstrijd krijgt 3 punten, de verliezer 0. Bij gelijkspel krijgen de tegenstanders allebei 1 punt. Na afloop wordt de stand bepaald door het aantal punten dat elk land behaald heeft.

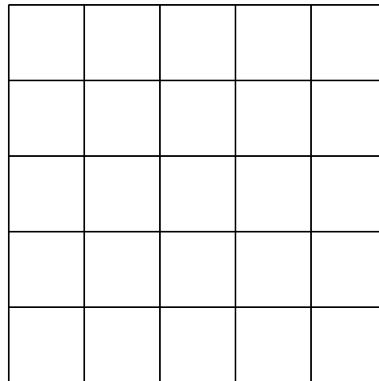
Welke van de volgende puntenlijsten zijn mogelijk?

	Lijst 1	Lijst 2	Lijst 3	Lijst 4	Lijst 5	Lijst 6
Duitsland	8	6	7	5	5	6
Nederland	5	5	4	3	5	4
België	4	4	3	3	3	3
Luxemburg	1	3	2	2	2	3

Estafette-opgave 9 (20 punten, rest 290 punten)

Knippen

Een vierkant vel papier wordt opgevouwen, viermaal horizontaal en viermaal verticaal, zodat een klein vierkantje ontstaat van 25 lagen. Dat vierkantje knip je vervolgens door, langs een lijn evenwijdig aan een diagonaal, waarna alles weer opengevouwen wordt.

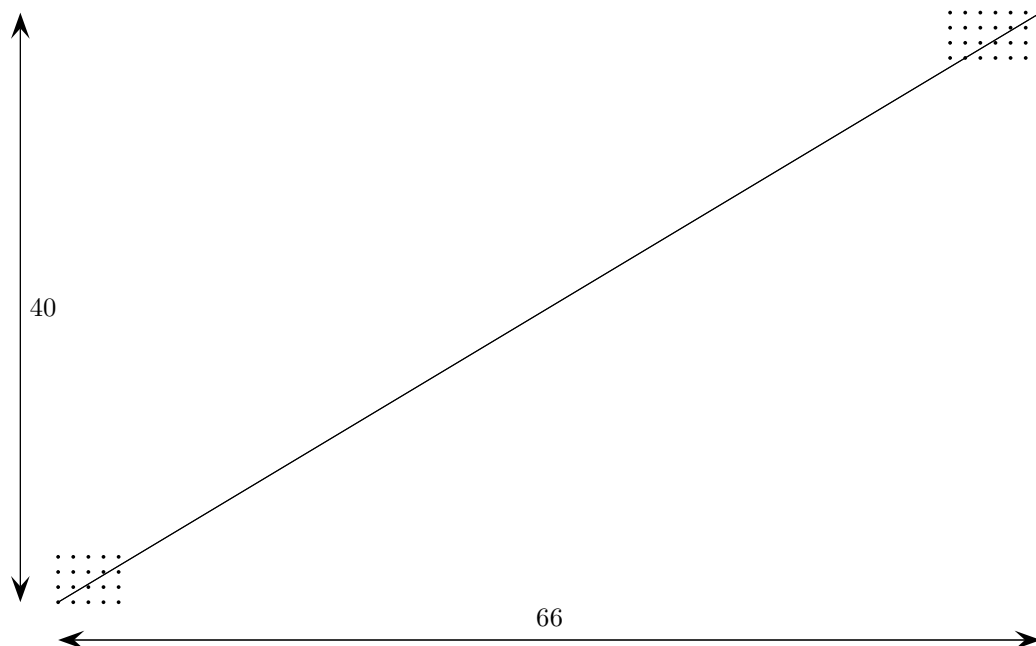


Hoeveel stukken papier heb je dan?

Estafette-opgave 10 (20 punten, rest 270 punten)

Stippen

In een regelmatig rechthoekig stippenpatroon van 40 rijen met elk 66 stippen wordt een diagonaal getrokken.

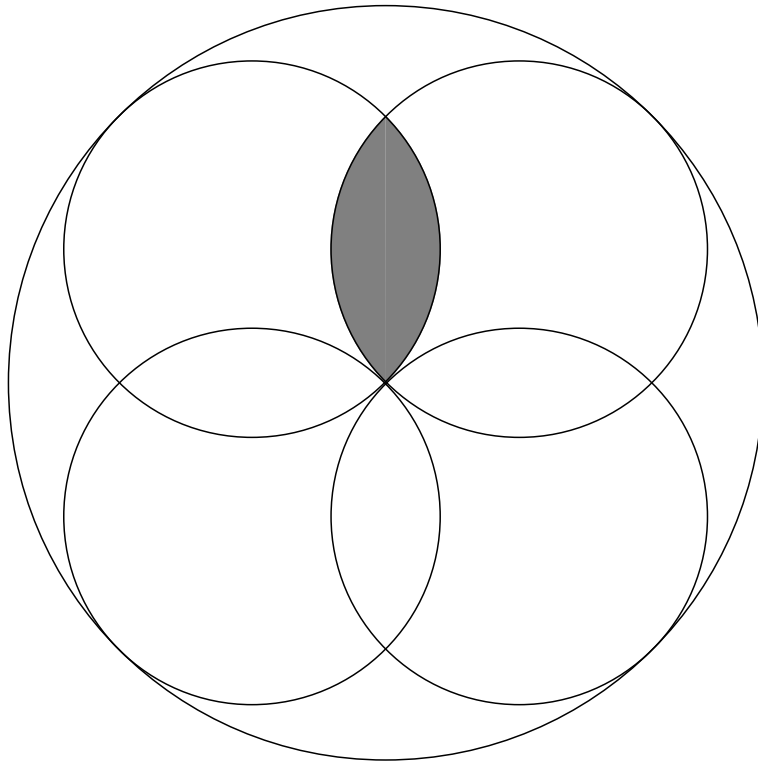


Hoeveel stippen liggen er op de diagonaal (inclusief begin- en eindstip)?

Estafette-opgave **11** (30 punten, rest 240 punten)

Oppervlakte

De straal van de grote cirkel is 4.

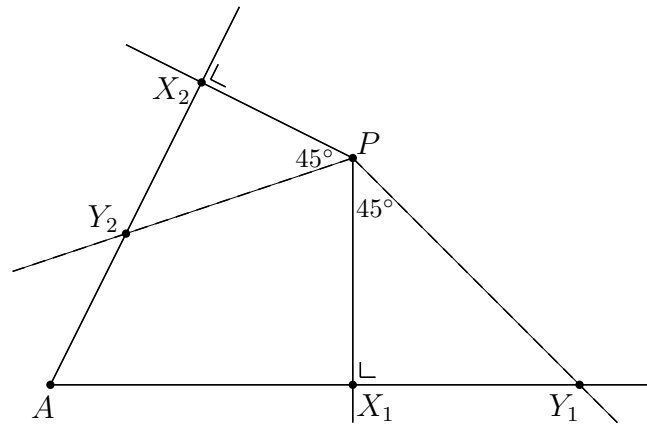


Hoe groot is de grijze oppervlakte?

Estafette-opgave **12** (20 punten, rest 220 punten)

Draaien

Binnen hoek A ligt een punt P .



X_1 en X_2 zijn de voetpunten van de loodlijnen vanuit P op de benen van hoek A . Die loodlijnen worden om P gedraaid over een hoek van 45° , linksom. Zo ontstaan de punten Y_1 en Y_2 . De lengte van het lijnstuk X_1X_2 is 6.

Wat is de lengte van het lijnstuk Y_1Y_2 ?

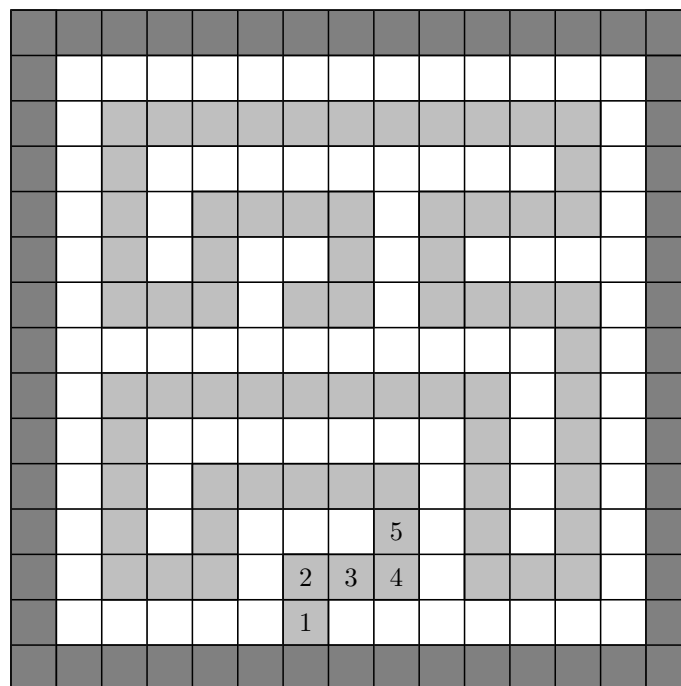
Estafette-opgave **13** (30 punten, rest 190 punten)

Labyrint

Een pleintje is bedekt met 31×31 vierkante tegels. We zeggen dat twee tegels aan elkaar *grenzen* als ze een zijde gemeen hebben, en *raken* als ze geen zijde maar wel een hoekpunt gemeen hebben.

De tegels aan de rand zijn donker. Vanaf die rand kronkelt een pad gevormd door grijze tegels, genummerd $1, 2, \dots$. De andere tegels zijn wit. Tegels 1 grenst aan de rand, de andere tegels van het pad niet. Tegels 1 en 2 grenzen aan elkaar, evenals 2 en 3, enzovoorts, maar verder grenzen of raken geen twee tegels van het pad aan elkaar. Uitzondering: de tegel vóór een bocht en ná die bocht raken elkaar wel, zoals de tegels 1 en 3 in het voorbeeld. Er is geen vierkant van 2×2 witte tegels.

In onderstaand voorbeeld is een dergelijk situatie aangegeven voor een 15×15 pleintje; er is een pad van 72 grijze tegels, en verder zijn er 56 donkere tegels en 97 witte.



Uit hoeveel grijze tegels bestaat het pad in het 31×31 pleintje?

Estafette-opgave 14 (30 punten, rest 160 punten)

De binnenkomer

In een zaal bevindt zich een groep mensen, bestaande uit minstens 2 en hoogstens 24 personen.

Iemand merkt op: 'Ons aantal is even'.

stilte.

Iemand merkt op: 'Ons aantal is deelbaar door 3'.

stilte.

Iemand merkt op: 'Als er nog twee mensen bijkomen is ons aantal een vijfvoud'.

stilte.

Iemand merkt op: 'Ons aantal is geen priemgetal'.

stilte.

Iemand merkt op: 'Ons aantal is oneven'.

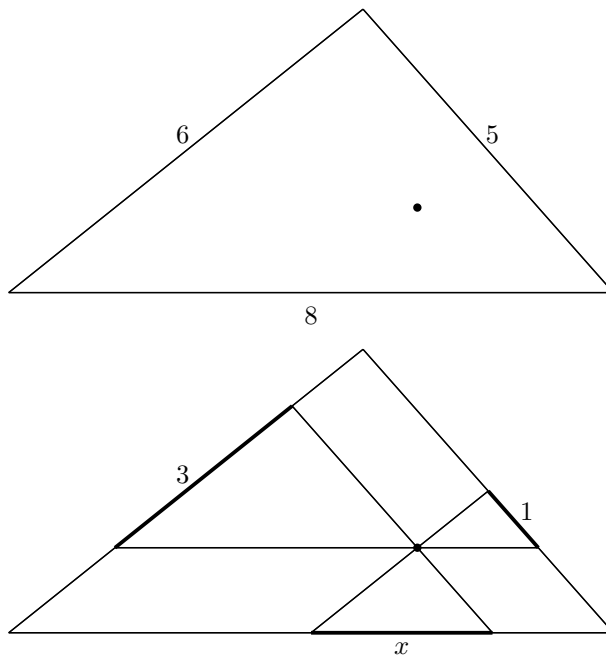
Alle vijf de opmerkingen waren juist op het moment dat ze werden uitgesproken, maar tijdens één van de stiltes is er een persoon binnengekomen.

Hoeveel mensen zijn er aan het eind van het verhaal in de zaal?

Estafette-opgave 15 (30 punten, rest 130 punten)

Afgesneden stukken

We kiezen een punt binnen een driehoek met zijden van 5, 6 en 8. Door dat punt trekken we lijnen, evenwijdig aan de zijden van de driehoek. Die lijnen snijden van de zijden stukken af van lengte 1, 3 en x . Zie de tweede figuur.

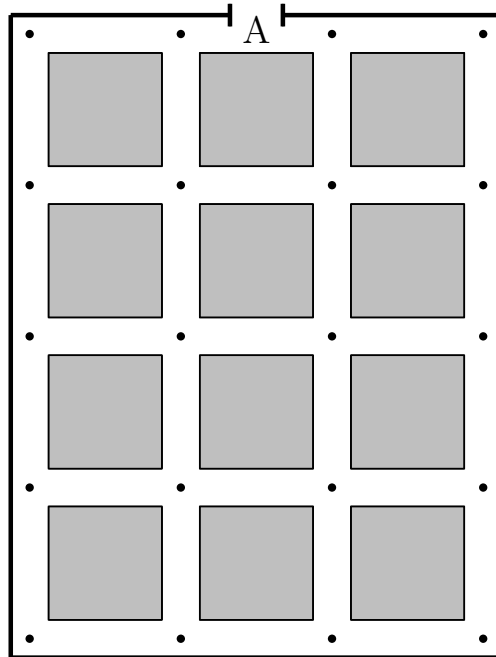


Hoe groot is x ?

Estafette-opgave **16** (20 punten, rest 110 punten)

De wandeling

Hieronder staat de plattegrond van een stadspark. De stippen geven plaatsen aan waar een beeld staat. We willen een wandeling door het park maken die bij de toegang (bij A) begint en eindigt, en waarbij elk beeld één keer gepasseerd wordt.

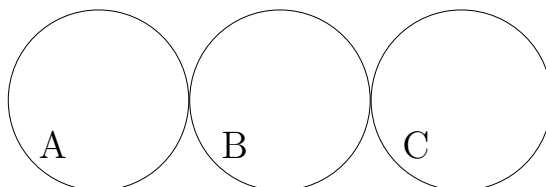


Op hoeveel manieren kan dat?

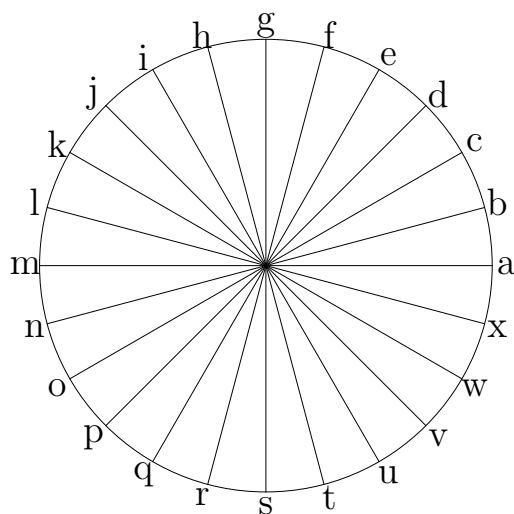
Estafette-opgave 17 (20 punten, rest 90 punten)

Rollende munten

A , B en C zijn drie even grote munten. Ze liggen op een rijtje, B in het midden, en A en C rakend aan B , zoals in onderstaand schema.



Opeens beginnen A en C over de rand van B te rollen, zonder slippen en rechtsom (met de wijzers van de klok mee), C tweemaal zo snel als A . De beweging stopt zodra C op A botst.



In bovenstaand diagram zijn 24 punten van de rand van B benoemd.

Geef de naam van het punt van B waar op het moment van stoppen A aan B raakt.

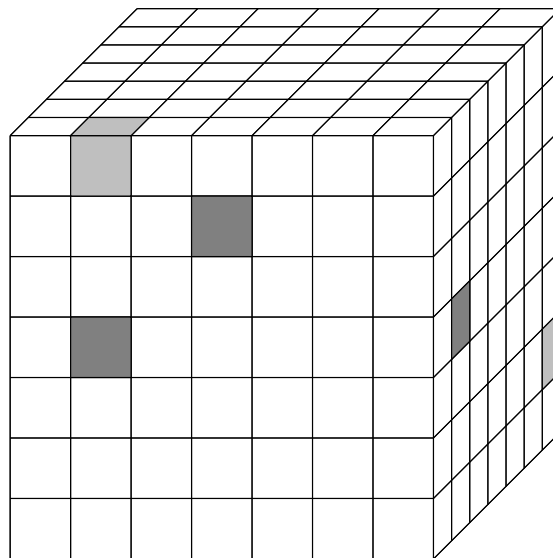
Estafette-opgave 18 (30 punten, rest 60 punten)

Hoeveel verschillende?

Een kunstenaar bouwt een kubus uit $7 \times 7 \times 7$ even grote kubusvormige blokjes. Hij beschikt over blokjes van verschillende kleuren glas.

Hij wil de grote kubus zo maken dat bij draaien of spiegelen ervan een blokje altijd terecht komt op een plaats waar eerst een blokje van dezelfde kleur zat.

Zo moeten onder andere beide lichtgrijze blokjes in onderstaand diagram dezelfde kleur krijgen. Hetzelfde geldt voor de drie donkergrijze blokjes.



Wat is het grootste aantal kleuren dat de kunstenaar kan gebruiken?

Estafette-opgave 19 (30 punten, rest 30 punten)

VICI?

De Romeinse cijfers en hun waarden worden beschreven door onderstaande tabel:

I	= 1
V	= 5
X	= 10
L	= 50
C	= 100
D	= 500
M	= 1000

We maken getallen van twee Romeinse cijfers. De waarde van een combinatie wordt bepaald door de volgende regel: als een kleiner cijfer vóór een groter staat, moet het kleinere van het grotere worden afgetrokken; in alle andere gevallen moeten de cijfers worden opgeteld. Voorbeelden: **VD** heeft waarde 495 en **CI** heeft waarde 101.

Niet alle combinaties zijn echter geldig; ongeldig is elke combinatie met een waarde die ook met één enkel cijfer aangegeven zou kunnen worden. Zo is **LC** niet geldig, want de waarde is gelijk aan die van **L**. Ook **VV** is niet geldig, want de waarde is gelijk aan die van **X**.

Wat is de som van de waarden van alle geldige combinaties van twee Romeinse cijfers?
Geef de uitkomst in het decimale getalstelsel.

Estafette-opgave 20 (30 punten, rest 0 punten)

De splitsing

Voor elke splitsing van 101 als som van oneven getallen kan het product van die getallen worden bepaald.

Voor welke splitsing is dat product zo groot mogelijk?

Voorbeeld: de splitsing in zestien vijven en drie zevens noteren we als $5^{16}7^3$.