
WISKUNDE-ESTAFETTE RU 2004

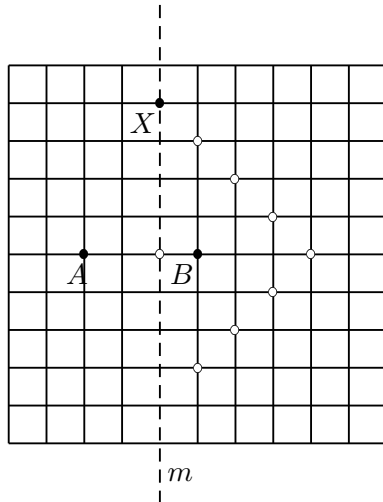
Uitwerkingen

1

We zoeken punten P waarvoor $AP = 2 \cdot BP$. Zij m de verticale lijn door X . We kunnen dan drie situaties onderscheiden:

- Als P links van de lijn m ligt dan is $AP \leq BP$. In dit geval kan P niet aan de eis voldoen.
- Als P op de lijn m ligt dan is $AP = BP + 1$. Dus P voldoet alleen als $BP = 1$ en $AP = 2$. Er is precies één punt dat daaraan voldoet.
- Als P rechts van de lijn m ligt dan is $AP = BP + 3$. In dit geval voldoet P precies als $BP = 3$. Er zijn precies zeven punten die daaraan voldoen.

De acht punten zijn hieronder aangegeven.



2

Ieder heeft minstens één en hoogstens zes partijtjes gespeeld; dat zijn zes mogelijke antwoorden. Dus zijn de zes antwoorden 1, 2, 3, 4, 5, 6. Noem die zes personen naar de antwoorden die ze geven.

Zes heeft met ieder ander gespeeld, in het bijzonder met Een. Een heeft dus behalve met Zes met niemand gespeeld. Dus heeft Vijf met iedereen gespeeld behalve met Een. Twee heeft dus alleen met Vijf en Zes gespeeld.

We weten nu dat Vier met Vijf en Zes gespeeld heeft, maar niet met Een of Twee. Dus moet Vier met Drie en met Jan hebben gespeeld. Drie heeft dus alleen met Vier, Vijf en Zes gespeeld. Jan heeft dus drie partijen gespeeld, en wel met Vier, Vijf en Zes. Het antwoord luidt dus 3.

Opmerking: het gegeven dat iedereen minstens één partijtje speelt is overbodig. Stel namelijk dat er iemand is, noem hem Nul, die 0 antwoordt. Dan heeft niemand meer dan vijf partijen gespeeld. Dus zijn de andere vijf antwoorden 1, 2, 3, 4, 5. Noem die personen naar de antwoorden die ze geven.

Vijf heeft met iedereen gespeeld, behalve met Nul. In het bijzonder heeft hij met Een gespeeld. Een heeft dus met niemand anders gespeeld. Dus heeft Vier met iedereen gespeeld behalve met Nul en Een. Twee heeft dus alleen met Vier en Vijf gespeeld.

We weten nu dat Drie wel met Vier en Vijf heeft gespeeld, maar niet met Nul, Een of Twee. Dus moet Drie ook met Jan hebben gespeeld. Jan heeft dus 3 partijen gespeeld, en wel met Drie, Vier en Vijf.

3

Dat product is dus een getal met minstens 6 verschillende delers. We maken nu een tabelletje:

Getal	Aantal delers
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4
7	2
8	4
9	3
10	4
11	2
12	6
13	2
\vdots	\vdots

Hieruit blijkt dat 12 het kleinste getal is dat 6 of meer verschillende delers heeft.

We kunnen dan 1, 2, 3, 4, 6 en 12 op de grensvlakken zetten. We zouden bijvoorbeeld een gewone dobbelsteen kunnen nemen, een 12 zetten op het zijvlak dat de 6 bevat, en een 6 op het zijvlak dat de 5 bevat.

4

We bekijken eerst de verschillende mogelijkheden voor kaarten uit het tweede stapeltje:

- Als er twee of minder kaarten met €0 getrokken zijn, dan zijn er drie of meer kaarten met €50 of €60 getrokken. Dat maakt het totale bedrag minstens €150, in strijd met het gegeven.
- Als er vier of meer kaarten met €0 getrokken zijn, dan is er hoogstens één kaart met €50 of €60 getrokken. Er moet dan nog minstens €72 door het eerste stapeltje geleverd worden. Dat kan niet, want dat vergt minstens $\frac{72}{14} > 5$ kaarten, in strijd met het gegeven.

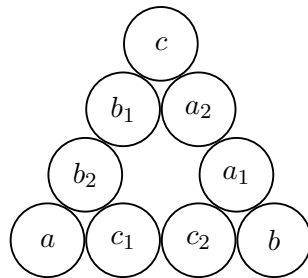
Er zijn dus precies drie kaarten met €0 getrokken. Voor de overige kaarten uit het tweede stapeltje blijven drie mogelijkheden over:

- Twee kaarten met €60. In dat geval komt er €12 uit het eerste stapeltje, en dat kan alleen door drie kaarten van €4.
- Een kaart met €60 en een kaart met €50. In dat geval komt er €22 uit het eerste stapeltje, en dat kan alleen door één kaart van €14, en twee kaarten van €4.
- Twee kaarten met €50. In dat geval komt er €32 uit het eerste stapeltje, en dat kan alleen door twee kaarten van €14 en één kaart van €4 (want er kunnen geen 8 kaarten van €4 getrokken zijn).

In alle gevallen zijn er in totaal 5 kaarten met €0 getrokken.

5

Laten we even namen geven aan de getallen in de cirkeltjes, zo:



Dan is de zijdesom z gelijk aan

$$z = b_1 + b_2 + a + c = a_1 + a_2 + b + c = c_1 + c_2 + a + b$$

Noteer s voor de hoeksom $s = a + b + c$; dan is $s \geq 1 + 2 + 3 = 6$. De som van alle negen getallen is enerzijds $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ en anderzijds

$$a + b + c + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 = 3z - s$$

We lezen af dat

$$z = \frac{45 + s}{3} \geq \frac{45 + 6}{3} = 17$$

Dat $z = 17$ kan voorkomen blijkt uit het voorbeeld $a = 1, b = 2, c = 3, a_1 = 5, a_2 = 7, b_1 = 9, b_2 = 4, c_1 = 8, c_2 = 6$.

Hoe vinden we dat voorbeeld? Merk daartoe op dat we moeten hebben $a_1 + a_2 - a = b_1 + b_2 - b = c_1 + c_2 - c = z - (a + b + c) = 11$. Met de minimale keuzes $a = 1, b = 2, c = 3$ krijgen we dus $a_1 + a_2 = 12, b_1 + b_2 = 13$ en $c_1 + c_2 = 14$.

Uit elke invulling krijgen we een nieuwe invulling door elk cijfer x te vervangen door $10 - x$. De zijdesom verandert daardoor in $40 - z$. Dus $40 - z \geq 17$ oftewel $z \leq 23$.

6

Afhankelijk van welke twee personen de waarheid spreken hebben we zes gevallen:

- Fred en Gemma kunnen niet allebei gelijk hebben.
- Als Fred en Hans gelijk hebben, dan is $x < z < u < y$. Maar dan heeft Iris ook gelijk, in tegenspraak met het gegeven.
- Als Fred en Iris gelijk hebben, dan zijn er nog twee mogelijkheden:
 - Als $x < u < z < y$, dan zitten Gemma en Hans er allebei naast. Dit is een mogelijkheid.
 - Als $x < z < u < y$, dan heeft Hans gelijk, in tegenspraak met het gegeven.
- Als Gemma en Hans gelijk hebben, dan is $x < z < y < u$. Maar dan heeft Iris ook gelijk, in tegenspraak met het gegeven.
- Als Gemma en Iris gelijk hebben, dan is $x < z < y < u$. Maar dan heeft Hans ook gelijk, in tegenspraak met het gegeven.
- Als Hans en Iris gelijk hebben, dan zijn er twee mogelijkheden:
 - Als $x < z < u < y$, dan heeft Fred ook gelijk, in tegenspraak met het gegeven.
 - Als $x < z < y < u$, dan heeft Gemma ook gelijk, in tegenspraak met het gegeven.

We concluderen dat $x < u < z < y$. Dus x is het kleinste en y het grootste.

7

Schrijf x voor de lengte van de zijden van de kleine witte vierkantjes links onderaan. Dan is de lengte van de zijden van het grote donkere vierkant links bovenaan gelijk $3x$. Dus is de lengte van de linkerzijde van de grote rechthoek gelijk aan $4x = 144$, wat betekent dat $x = 36$. De lengte van de zijden van de grijze vierkantjes rechts is $\frac{1}{3} \times 144 = 48$. Ten slotte is de lengte van de onderzijde van de rechthoek gelijk aan $(3 \times 36) + 48 = 156$.

8

Voor het gemak van de berekening voeren we een nieuwe tijdseenheid in; een ‘tik’ is $\frac{1}{120}$ seconde. In een tik draait de grote sector over $\frac{4 \cdot 360}{120} = 12$ graden en de kleine over $\frac{5 \cdot 360}{120} = 15$ graden.

We bekijken wat er gebeurt gedurende de seconde die begint op het tijdstip waarop de tekening van toepassing is.

- De grote schijf bedekt de lichtbron
 - van de 5^e tot de 25^e tik,
 - van de 35^e tot de 55^e tik,
 - van de 65^e tot de 85^e tik,
 - van de 95^e tot de 115^e tik.
- De kleine schijf bedekt de lichtbron
 - van de 2^e tot de 10^e tik,
 - van de 26^e tot de 34^e tik,
 - van de 50^e tot de 58^e tik,
 - van de 74^e tot de 82^e tik,
 - van de 98^e tot de 106^e tik.
- Samen schermen de schijven de lichtbron af
 - van de 2^e tot de 25^e tik,
 - van de 26^e tot de 34^e tik,
 - van de 35^e tot de 58^e tik,
 - van de 65^e tot de 85^e tik,
 - van de 95^e tot de 115^e tik.

Dat is in totaal $\frac{23+8+23+20+20}{120} = \frac{47}{60}$ van de tijd.

De volgende figuur is een schematische weergave van bovenstaande berekening. De breedte van de figuur komt overeen met één volle seconde.



Een of meer volle secondes later hebben beide schijven een aantal volledige omwentelingen gemaakt en is de situatie precies hetzelfde. Het gemiddelde gedrag over een lange tijdsperiode is dus precies hetzelfde als dat over die eerste volle seconde. Het licht wordt dus $\frac{13}{60}$ van de tijd doorgelaten (en dus niet $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, wat je misschien denken zou).

9

Geen toelichting vereist.

10

We onderscheiden de mogelijke gevallen en bepalen de kans op elk van die gevallen.

- Als passagier 1 *niet* op plaats 2 of 3 gaat zitten, dan komt passagier 2 *wel* op zijn eigen plaats terecht, en vervolgens komt passagier 3 *wel* op zijn eigen plaats terecht. De kans hierop is $\frac{98}{100}$.
- Als passagier 1 op plaats 3 gaat zitten, dan komt passagier 3 *niet* op zijn eigen plaats terecht. De kans hierop is $\frac{1}{100}$.
- Nu moeten we nog onderzoeken wat er gebeurt als passagier 1 op plaats 2 gaat zitten. De kans hierop is $\frac{1}{100}$. Weer onderscheiden we de mogelijke gevallen en bepalen hun kansen.
 - Als passagier 2 *niet* op plaats 3 gaat zitten, dan komt passagier 3 *wel* op zijn eigen plaats terecht. De voorwaardelijke kans hierop (d.w.z. gegeven het gedrag van passagier 1) is $\frac{98}{99}$.
 - Als passagier 2 op plaats 3 gaat zitten, dan komt passagier 3 *niet* op zijn eigen plaats terecht. De voorwaardelijke kans hierop is $\frac{1}{99}$.

De kans dat passagier 3 op zijn eigen plaats terechtkomt is dus

$$\frac{98}{100} + \left(\frac{1}{100} \times \frac{98}{99} \right) = \frac{98}{99}$$

11

We sommen op wat er in elke ronde wordt omgehakt, en wat (nog even) blijft staan:

- In de eerste rondgang worden de bomen met even nummers 2, 4, ..., 80 omgehakt. De bomen met oneven nummers 1, 3, ..., 77, 79 blijven staan.
- In de tweede rondgang worden de bomen met nummers 3, 7, ..., 75, 79 omgehakt; dat zijn de 4-vouden min 1. De bomen met nummers 1, 5, ..., 73, 77 blijven staan; dat zijn de 4-vouden min 3.
- In de derde rondgang worden de bomen met nummers 5, 13, ..., 69, 77 omgehakt; dat zijn de 8-vouden min 3. De bomen met nummers 1, 9, ..., 65, 73 blijven staan; dat zijn de 8-vouden min 7.
- In de vierde rondgang worden de bomen met nummers 9, 25, 41, 57, 73 omgehakt; dat zijn de 16-vouden min 7. De bomen met nummers 1, 17, 33, 49, 65 blijven staan; dat zijn de 16-vouden min 15.

- In de vijfde rondgang worden de bomen met nummers 17, 49 omgehakt. De bomen met nummers 1, 33, 65 blijven staan.
- In de zesde rondgang worden de bomen met nummers 1, 65 omgehakt. Alleen de boom met nummer 33 blijft staan.

12

Bekijk een pijl in de centrale cel die niet in horizontale of verticale richting wijst, en bekijk het spiegelbeeld van die pijl in de cel met coördinaten (x, y) . Dat spiegelbeeld is een pijl met één van vier mogelijke richtingen, afhankelijk van het even of oneven zijn van x en het even of oneven zijn van y . In het bijzonder wijst dat spiegelbeeld precies in tegengestelde richting alleen als x en y allebei oneven zijn. Omdat $-5 \leq x \leq +5$ en $-5 \leq y \leq +5$ komt dat $6 \times 6 = 36$ keer voor.

Bekijk nu een pijl in de centrale cel die in horizontale richting wijst. Hij kan dus alleen wijzen naar cellen met coördinaten $(x, 0)$ voor zekere x . Het spiegelbeeld in die cel wijst in dezelfde richting of tegengestelde richting afhankelijk van het even respectievelijk oneven zijn van x . Dat laatste treedt dus 6 keer op.

Evenzo heeft een pijl in het centrale veld die in verticale richting wijst precies 6 spiegelbeelden die naar het centrale veld wijzen. In totaal komt het dus $36 + 6 + 6 = 48$ keer voor dat de pijlen ‘op elkaar gericht’ zijn.

13

Omdat we alleen bij het laatste cijfer zeker weten dat er geen carry optreedt beginnen we ons onderzoek daar.

- Stel dat de 6 is aangetast. Dan kan de 3 ook niet correct zijn. Dus zijn de 3 en de 6 verwisseld. Maar dat is duidelijk onzin. Dus is de 6 onaangetast.
- Als de 3 is aangetast, dan kan hij alleen maar door een 8 vervangen zijn. Maar dan zou de som 10 cijfers moeten hebben. Dus de 3 is onaangetast.
- Kijken we nu naar de eerste cijfers dan zien we dat de 9 ook goed is (en er is blijkbaar geen carry van de tweede cijfers).
- Stel dat de 2 is aangetast. Kijkend naar de achtste cijfers blijkt dat de 7 ook niet correct kan zijn. Dus zijn de 2 en de 7 verwisseld.
- Inderdaad blijkt na verwisseling van de 2 en de 7 de optelling weer te kloppen.

Wellicht ten overvloede kijken we nog even even wat er gebeurt als de 2 niet is aangetast. In dat geval is de 7 ook correct.

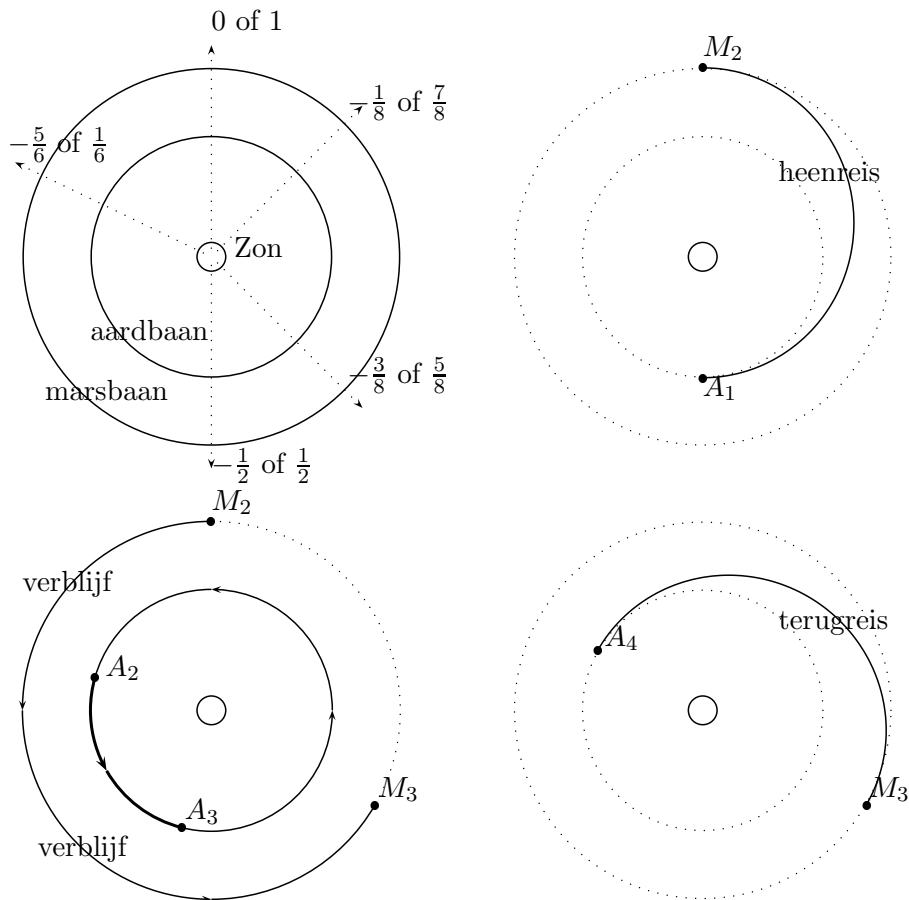
- Als de 8 is aangetast dan zien we aan de zevende cijfers dat de 1 ook niet correct kan zijn. In dat geval zijn de 8 en de 1 verwisseld. Maar dat is duidelijk onzin. Dezelfde redenering werkt als de 1 is aangetast. We concluderen dat de 8 en de 1 correct zijn.
- Kijkend naar de vijfde cijfers blijkt dat de 4 correct moet zijn.

- Nu zouden alleen de 0 en de 5 nog verwisseld kunnen zijn. Maar dat is duidelijk onzin.

De enige mogelijkheid is dus dat de 2 en de 7 verwisseld zijn.

14

We rekenen *tijdstippen* in de genoemde eenheden, waarbij het nulpunt samenvalt met het moment van aankomst op Mars. We rekenen *posities* (richtingen gezien vanuit de Zon) in volle omlopen, waarbij het nulpunt samenvalt met de plaats waar Mars zich bevindt op het moment van aankomst van de raket. Merk op dat twee getallen die een geheel getal verschillen dezelfde plaats aanduiden.



Op het moment van vertrek vanaf Aarde bevond de raket (evenals Aarde) zich op positie $-\frac{1}{2}$. Stel dat de reizigers x eenheden lang op Mars verblijven. Op het moment van vertrek vanaf Mars bevindt Mars (evenals de raket) zich op positie $\frac{x}{32}$. Na de terugreis bevindt de raket zich dus op positie $\frac{x}{32} + \frac{1}{2}$.

Op het moment van vertrek vanaf Mars bevond Aarde zich op positie $-\frac{1}{2} + \frac{x+12}{17}$, en na de terugreis dus op positie $-\frac{1}{2} + \frac{x+24}{17}$. Wil je dat de raket Aarde niet misloopt dan moet dus

$$-\frac{1}{2} + \frac{x+24}{17} = \frac{x}{32} + \frac{1}{2} + \text{geheel getal } n$$

Voor $n = 0$ wordt x negatief. Voor $n = 1$ komen we uit op

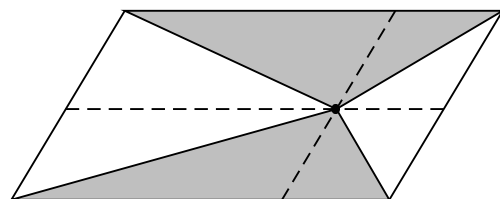
$$\frac{2x + 31}{34} = \frac{x + 48}{32}$$

wat betekent dat $30x = 34 \cdot 48 - 32 \cdot 31 = 640$ zodat $x = \frac{64}{3}$.

Opmerking: dat komt neer op ongeveer 458 dagen. De NASA meldt 455 dagen.

15

Trek door het punt twee lijnen, parallel aan de zijden van het parallellogram.



Het parallellogram is daardoor verdeeld in vier kleinere parallellogrammen. In de figuur is de helft van elk van deze vier stukken grijs gemaakt. De grijze oppervlakte is dus gelijk aan de witte. Dus $x + 11 = 17 + 8$, dus $x = 14$.

16

Laten we de vier partijen A , B , C en D noemen, en hun respectievelijke zetelaantallen respectievelijk a , b , c en d .

Het verstandigste is uit te gaan van de gok dat de 76 stemmen opgebracht worden door een coalitie van *twee* partijen, en de 82 stemmen ook (we zullen straks nog toelichten dat dit inderdaad het geval moet zijn). Na eventueel verwisselen van de labels A, B, C, D hebben we dus

$$a + b = 76 \quad \text{en dus } c + d = 74$$

$$a + c = 82 \quad \text{en dus } b + d = 68$$

In het bijzonder is $b - c$ en dus ook $b + c$ en $a + d$ even, en dus niet 97. De 97 stemmen moeten dus zijn opgebracht door een coalitie van *drie* partijen, en de resterende partij heeft $150 - 97 = 53$ zetels. We werken alle mogelijkheden uit:

$$\text{Als } a = 53, \text{ dan } b = 23, c = 29, d = 45$$

$$\text{Als } b = 53, \text{ dan } a = 23, c = 59, d = 15$$

$$\text{Als } c = 53, \text{ dan } a = 29, b = 47, d = 21$$

$$\text{Als } d = 53, \text{ dan } c = 21, a = 61, b = 15$$

Alleen de derde mogelijkheid maakt een coalitie met 100 zetels mogelijk.

Eenduidigheid van de oplossing:

We laten nu zien dat de 76 stemmen niet door één partij of door een coalitie van drie partijen geleverd kunnen worden, en de 82 zetels ook niet.

- Als de 76 stemmen uit één partij A komen dan zijn de andere drie partijen te klein om nog een meerderheid te vormen. Dus maakt partij A deel uit van elk van de coalities die 82, 97 en 100 zetels hadden. De rest van de betreffende coalities heeft dus respectievelijk 6, 21 en 24 zetels.

In het bijzonder is daaronder een partij met ≤ 6 zetels en een *andere* partij met ≤ 21 zetels. Er is dus ook nog een derde partij met $\geq 74 - 6 - 21 = 47$ zetels. Die 6, 21 en 24 zetels worden dus door slechts 2 partijen opgebracht. Dat is duidelijk onmogelijk.

- Als de 76 stemmen door een coalitie van drie partijen worden opgebracht dan heeft de ontbrekende partij $150 - 76 = 74$ zetels. De verdere redenering gaat als in het vorige geval, met lichtelijk andere getallen.
- Als de 82 stemmen uit één partij komen, dan is die partij te sterk en de resterende coalitie te zwak om aan 76 stemmen te komen.
- Als de 82 stemmen door een coalitie van drie partijen B, C, D worden opgebracht dan moet de resterende partij A beschikken over $150 - 82 = 68$ zetels. Van de getallen b, c, d moet er minstens één oneven zijn om aan 97 stemmen te kunnen komen en er moet nog een oneven en een even getal bij zijn om het totaal op 82 te brengen. We mogen wel aannemen dat B die partij is met een even zetelaantal.

Partij A moet deel uitmaken van de coalities die 97 en 100 zetels hadden. De rest van de betreffende coalitie telt dus 29 respectievelijk 32 zetels. Die coalitie met 29 zetels bevat dus een partij met een oneven aantal zetels; we mogen aannemen dat dit C is. We hebben dus

$$(b = 32 \text{ of } c + d = 32) \quad \text{én} \quad (c = 29 \text{ of } b + c = 29)$$

Uit elk van die combinaties van mogelijkheden kun je de getallen a, b, c, d oplossen, maar geen van die oplossingen bevat een coalitie met 76 zetels.

17

De man die tegenover zijn vrouw zit moet Mark, Leo of Otto zijn. We onderzoeken elk van deze mogelijkheden.

- Stel dat Mark en Erica een paar zijn. We weten dat Leo niet met Bianca getrouwd is (want die zit naast hem) en niet met Daphne (want die zit tegenover hem), en niet met Anna of Erica (want die hebben een andere partner), dus moet hij met Chantal getrouwd zijn. Verder is Bianca niet met Leo getrouwd (want die zit naast haar) en niet met Otto (want die zit tegenover haar) en niet met Mark of Karel, dus moet zij met Nico getrouwd zijn. Zo blijven alleen Daphne en Otto over, maar die kunnen niet bij elkaar horen, want ze zitten naast elkaar.

- Door verwisseling van links en rechts krijgen we evenzo een tegenspraak als we aannemen dat Leo met Daphne gehuwd is.
- Uit het voorgaande volgt dat Otto en Bianca gehuwd zijn. Verder kan Daphne niet met Karel, Leo, Nico of Otto gehuwd zijn en hoort ze dus bij Mark. Omdat Nico en Chantal niet gehuwd zijn hoort ten slotte Nico bij Erica en Chantal bij Leo.

18

We kunnen de diagrammen als optellingen zien. In de eerste en in de derde manier zien we dat in die optelling geen carry van het derde naar het tweede cijfer optreedt. In zo'n geval hebben we in feite te maken met het volgende verschijnsel:

- Met zes van de negen cijfers worden drie getallen gevormd, waarvan het tweede het dubbele van het eerste is, en het derde het drievoud van het eerste. In de eerste manier zijn dat 19, 38 en 57. In de derde manier zijn dat 27, 54 en 81.
- De overblijvende drie cijfers zijn op te vatten als drie getallen, waarvan het tweede het dubbele van het eerste is, en het derde het drievoud van het eerste. In de eerste manier zijn dat 2, 4 en 6. In de derde manier zijn dat 3, 6 en 9.

In zo'n geval krijgen we een nieuwe manier door het derde cijfer vóór de eerste twee te zetten. Uit de eerste manier krijg je zo de tweede manier. Uit de derde manier krijg je zo een nieuwe manier: 327, 654 en 981. Dat is het antwoord op de gestelde vraag.

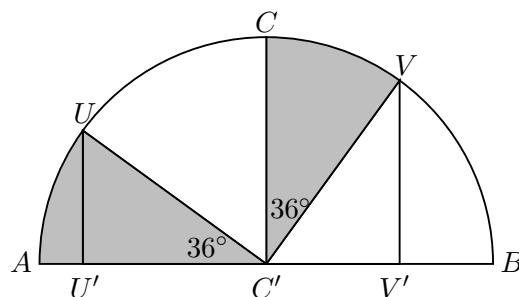
Eenduidigheid van de oplossing:

Het vergt een heleboel rekenwerk om te controleren dat er behalve deze vier geen andere manieren zijn. Twee feiten beperken het aantal te controleren gevallen:

- Het eerste cijfer van het eerste getal kan niet groter zijn dan 3, want anders wordt het derde getal groter dan 1000.
- De som van de cijfers van het eerste getal moet een drievoud zijn. Dat volgt uit de bekende negenproef. Stel namelijk dat die som van de vorm $3x + 1$ is. Dan is de som van de cijfers van het tweede getal $6x + 2$ plus een negenvoud, en evenzo is de som van de cijfers van het derde getal $9x + 3$ plus een negenvoud. De som van alle cijfers is dan $18x + 6$ plus een negenvoud, wat een tegenspraak oplevert aangezien de som van alle cijfers 45 is. Een analoge redenering laat zien dat de som van de cijfers niet van de vorm $3x + 2$ kan zijn.

19

Omdat de driehoeken $C'V'V$ en $UU'C'$ congruent zijn en dus dezelfde oppervlakte hebben, kunnen we evengoed vragen naar de oppervlakte van het grijze gebied in de volgende figuur:



Maar nu bestaat het grijze gebied uit twee sectoren die elk precies $\frac{1}{10}$ van de cirkelschijf bestrijken, oftewel $\frac{1}{5}$ van de halve cirkelschijf. Het antwoord is dus $\frac{2}{5}$.

20

Het is duidelijk dat de grootste waarde optreedt als we alleen plustekens gebruiken, en dat deze $+15$ bedraagt. Evenzo treedt de kleinste waarde op als we alleen mintekens gebruiken, en deze bedraagt -15 . Het vervangen van een plusteken door een minteken of omgekeerd laat de pariteit (het even of oneven zijn) van de waarde onaangetast. Er kunnen dus alleen oneven waarden worden aangenomen.

We hebben nu gezien dat er geen andere waarden mogelijk zijn dan $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11, \pm 13$ of ± 15 . We zijn klaar als we kunnen laten zien dat als deze waarden ook inderdaad worden aangenomen. Welnu,

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = +15$$

$$0 - 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = +13$$

$$0 + 1 - 2 + 3 + 4 + 5 = +11$$

$$0 + 1 + 2 - 3 + 4 + 5 = +9$$

$$0 + 1 + 2 + 3 - 4 + 5 = +7$$

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 - 5 = +5$$

$$0 - 1 + 2 + 3 + 4 - 5 = +3$$

$$0 + 1 - 2 + 3 + 4 - 5 = +1$$

en door de plustekens en mintekens te verwisselen zien we dat de negatieve waarden ook worden aangenomen.

We concluderen dat de genoemde 16 getallen precies alle waardes zijn die worden aangenomen.