

---

---

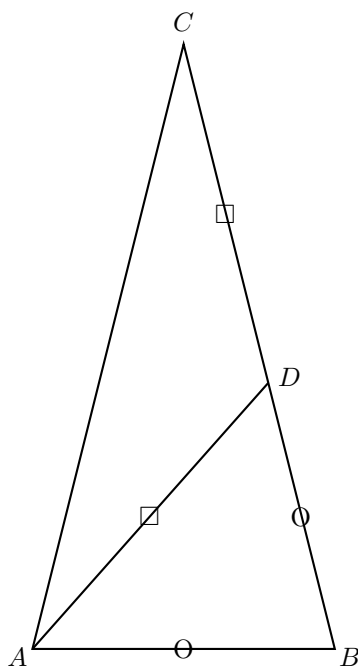
**WISKUNDE-ESTAFETTE 2011**

**Uitwerkingen**

---

---

**1**



Omdat driehoek  $ACD$  gelijkbenig is, is  $\angle CAD = \angle ACD$  en daarmee zien we dat  $2\angle CAD + \angle ADC = 180^\circ$ . Maar we weten ook dat  $180^\circ = \angle ADC + \angle ADB$ . Dus  $\angle ADB = 2\angle CAD$ . Driehoek  $ABD$  is ook gelijkbenig, dus ook  $\angle DAB = 2\angle CAD$ . Zo vinden we  $\angle CAB = 3\angle CAD$  en omdat driehoek  $ABC$  ook gelijkbenig is, is ook  $\angle CBA = 3\angle CAD = 3\angle ACB$ . En omdat  $180^\circ = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$  volgt dat  $\angle ACB = \frac{180^\circ}{7}$ .

**2**

De volgorde van de zetten maakt natuurlijk niets uit en twee zetten waarin dezelfde rij of kolom gekozen wordt kunnen we combineren tot één enkele zet. We kunnen dus wel aannemen dat er bij elke rij en kolom één getal is opgeteld.

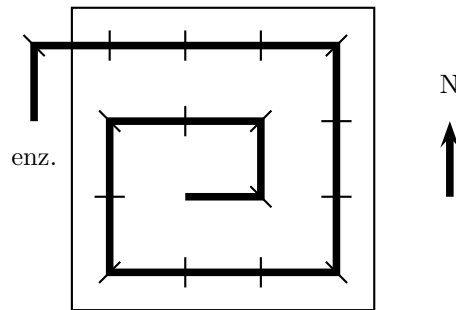
Noem het getal dat bij de middelste rij is opgeteld  $a$ , het getal dat bij de onderste rij is opgeteld  $b$ , het getal dat bij de linker kolom is opgeteld  $c$  en het getal dat bij de middelste kolom is opgeteld  $d$ . Dan kunnen we afleiden dat  $a + c = 17 - 8 = 9$  en net zo vinden we  $b + c = 11$  en  $b + d = 12$ . Uit deze laatste twee gelijkheden volgt dat  $d = c + 1$ , dus  $a + d = 10$ . Dus in het middelste vakje staat  $12 + a + d = 22$ .

3

Het nemen van de antipoden behoudt de oost-west verhouding maar draait de noord-zuid verhouding om. Dit is het makkelijkst in te zien door twee punten te beschouwen die op dezelfde lengte- of breedte-graad liggen. Het antwoord is dus WNW.

4

Na  $4n^2$  stappen ben je precies  $n$  meter ten noorden en  $n$  meter ten westen van je beginpunt. Om dit in te zien bekijk het plaatje hieronder voor  $n = 2$ .

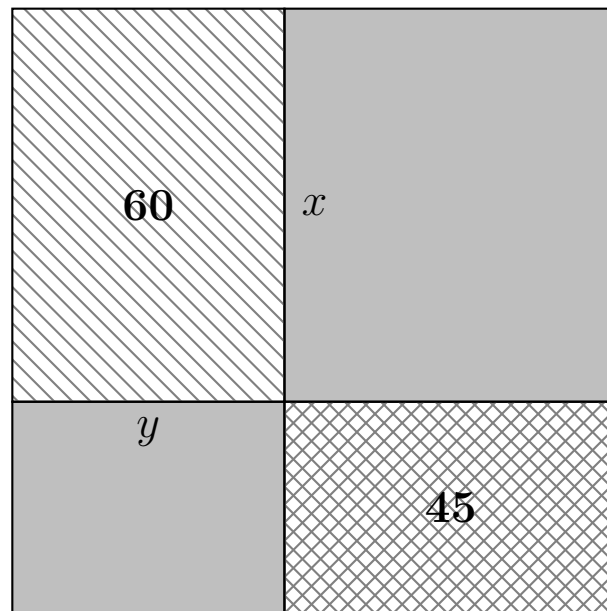


Er zijn precies 16 punten in het vierkant waar een stap begint. Dus na 16 stappen sta je linksboven net buiten dit vierkant.

Omdat  $100 = 4 \cdot 5^2$  zien we dat je na 100 stappen 5 meter naar het noorden en 5 meter naar het westen bent beland. De afstand tot het beginpunt is dan  $5\sqrt{2}$  meter.

5

Noem de lengte van de langste zijde van de gearceerde rechthoek  $x$  en de lengte van de korte zijde  $y$ .



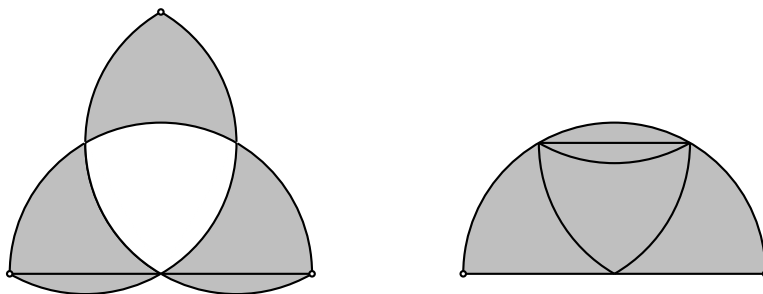
We weten dus dat  $xy = 60$  en  $(15 - x)(15 - y) = 45$ . Even rekenen geeft:

$$45 = (15 - x)(15 - y) = 225 - 15x - 15y + xy = 285 - 15x - 15y = 15(19 - x - y)$$

Daaruit volgt dat  $x + y = 16$ . Dus  $60 = xy = x(16 - x)$  oftewel  $x^2 - 16x + 60 = 0$ . Deze vergelijking heeft als oplossingen:  $x = 10$  en  $x = 6$ . Maar  $x \geq y$ , dus  $x = 10$  en  $y = 6$ . De oppervlakte van de gevraagde rechthoek is dan  $x(15 - y) = 90$ .

6

Met wat knip- en plakwerk zie je dat de gevraagde oppervlakte gelijk is aan de oppervlakte van een halve cirkel met straal 1, oftewel  $\frac{\pi}{2}$ .



7

Om op trede 9 uit te komen moet Rudi van trede 6, 7 of 8 komen. Dus het aantal mogelijkheden is gelijk aan de som van het aantal mogelijkheden om op trede 6, 7 en 8 te komen. Zo kun je je verder terug redeneren. Je vindt dan deze tabel

aantal treden	1	2	3	4	5	6	7	8	9
aantal mogelijkheden	1	2	4	7	13	24	44	81	149

8

Als je in het vakje rechtsboven en in het vakje daar direct onder iets hebt ingevuld dan kan je alle andere vakjes maar op één manier invullen. Het enige waar je op moet letten is dat deze andere getallen ook positief blijven.

Rechtsboven kunnen we een 1, 2 of 3 invullen. Als we een 1 invullen, kan in het vakje daaronder nog 1 t/m 7 staan. Vullen we een 2 in, dan kunnen alleen 1 t/m 6 nog en vullen we een 3 in, dan kunnen enkel 1 t/m 5. In totaal 18 mogelijkheden die ook allemaal voldoen.

9

Omdat  $\frac{137}{120} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60}$  is het duidelijk dat er hoogstens drie stambreuken nodig zijn. De vraag is of het niet met twee kan. Als  $\frac{137}{120}$  de som van twee stambreuken zou zijn, dan moet een van die twee gelijk zijn aan  $\frac{1}{1}$ , want  $\frac{137}{120} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ , maar dat zou betekenen dat de ander  $\frac{17}{120}$  moet zijn en dat is geen stambreuk. Dus met slechts twee stambreuken gaat het niet.

Er zijn twee manieren om  $\frac{137}{120}$  als som van drie stambreuken te schrijven. Namelijk  $\frac{137}{120} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60}$  en  $\frac{137}{120} = \frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{24}$ .

10

Een herhaalrijtje kan je in 2, 3, 4, 6 of 12 gelijke stukken knippen. Maar als je het in 4, 6 of 12 gelijke stukken kan knippen dan zeker ook in 2. Dus we hoeven alleen te kijken naar rijtjes die in 2 of 3 stukken te knippen zijn.

Alle rijtjes die in twee gelijke stukken te knippen zijn maak je door de eerste zes nullen en éénen willekeurig te kiezen en dat stuk dan te herhalen. Dit kan op  $2^6 = 64$  manieren.

Alle rijtjes die in drie gelijke stukken te knippen zijn maak je door de eerste vier cijfers te kiezen en die dan drie keer te herhalen. Dit kan op  $2^4 = 16$  manieren.

Maar nu hebben we de rijtjes die je in zes stukken kan knippen dubbel geteld. Dit zijn er  $2^2 = 4$ . Het antwoord is dus  $64 + 16 - 4 = 76$ .

11

Er werden in totaal 10 wedstrijden gespeeld. Stel dat er  $n$  winstpartijen waren, dan is het totale aantal punten van alle ploegen samen gelijk aan  $3n + 2(10 - n) = 20 + n$ . Omdat alle ploegen gelijk zijn geëindigd moet dit een vijfvoud zijn. Dus  $n$  is gelijk aan 0, 5 of 10. Dat deze ook alle drie mogelijk zijn kan je eenvoudig nagaan.

12

Stel  $d$  is een deler van zowel  $12a$ ,  $1a2$  als  $a12$ , dan is  $d$  ook een deler van  $12a0 - 1a2 = 1098$  en van  $1a20 - a12 = 1008$  en dus ook van  $1098 - 1008 = 90$ . Tot slot moet  $d$  ook nog een deler zijn van  $12a - 90 = 3a$ .

Alle delers van 90 met twee cijfers zijn 10, 15, 18, 30, 45 en 90. En omdat  $a$  niet 0 is, is  $d = 18$  en  $a = 6$ . En inderdaad  $126 = 7 \cdot 18$ ,  $162 = 9 \cdot 18$  en  $612 = 34 \cdot 18$ .

Het antwoord is dus 18.

13

Als  $x$  een rechthoeksgetal is, dan zijn er positieve gehele getallen  $n$  en  $m$  zodat  $x = nm = 2(n + m)$ . We kunnen wel aannemen dat  $n \leq m$ . Omdat  $nm = 2n + 2m \leq 4m$  volgt dat  $n \leq 4$ . We kijken alle mogelijke waarden voor  $n$ .

- Als  $n = 1$  dan  $m = 2(m + 1)$  en dat is onmogelijk.
- Als  $n = 2$  dan  $2m = 2(m + 2)$ , dus ook dat kan niet.
- Als  $n = 3$  dan  $3m = 2(m + 3)$ , dus  $m = 6$ , dit geeft  $x = 18$  als rechthoeksgetal.
- Als  $n = 4$  dan  $4m = 2(m + 4)$ , dus  $m = 4$ , dit geeft  $x = 16$  als rechthoeksgetal.

Dus alleen 16 en 18 zijn rechthoeksgetallen.

14

We moeten het aantal getallen van de vorm  $2^a 10^b$  kleiner dan 20000 tellen. We houden telkens  $b$  vast en kijken dan wat  $a$  kan zijn. Natuurlijk moet  $0 \leq b \leq 4$  want  $10^4 = 10000$ .

- Als  $b = 0$  dan moet  $0 \leq a \leq 14$  want  $2^{14} = 16384$ .

- Als  $b = 1$  dan moet  $0 \leq a \leq 10$  want  $2^{10} = 1024$ .
- Als  $b = 2$  dan moet  $0 \leq a \leq 7$  want  $2^7 = 128$ .
- Als  $b = 3$  dan moet  $0 \leq a \leq 4$  want  $2^4 = 16$ .
- Als  $b = 4$  dan moet  $a = 0$  of  $a = 1$ .

In totaal zijn dit  $15 + 11 + 8 + 5 + 2 = 41$  getallen.

**15**

Beweringen 3 en 4 spreken elkaar tegen, dus minstens een van die twee is onwaar. Net zo spreken bewering 1 en 5 elkaar tegen, want alle getallen waarvan de som van de cijfers 9 is, zijn deelbaar door 3. Dus beweringen 2 en 6 zijn zeker waar. Alle getallen die aan beweringen 2 en 6 voldoen zijn: 10, 21, 32, 43, 65, 76, 87 en 98. Geen enkele van deze getallen heeft als som van de cijfers 9. Dus bewering 5 is onwaar.

Omdat bewering 3 of 4 ook al onwaar was moet bewering 1 dus wel waar zijn. Dus  $n$  moet gelijk zijn aan 43. En inderdaad voor  $n = 43$  zijn beweringen 1, 2, 3 en 6 waar en beweringen 4 en 5 niet.

Dus het gezochte getal is 43.

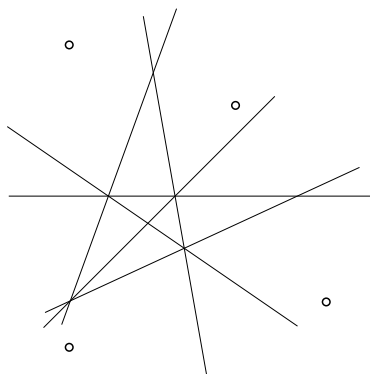
**16**

Als  $M$  het middelpunt van een cirkel  $C$  is, dan is het punt op  $C$  dat het dichtst bij een gegeven punt  $P$  ligt te vinden door de lijn  $PM$  te snijden met  $C$ . Hieruit volgt dat als twee punten  $P_1$  en  $P_2$  aan dezelfde kant van de cirkel liggen (d.w.z. allebei binnen of allebei buiten de cirkel) en  $P_1$  en  $P_2$  liggen even ver van  $C$ , dan liggen ze ook even ver van  $M$ , oftewel  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $A$  en  $B$ .

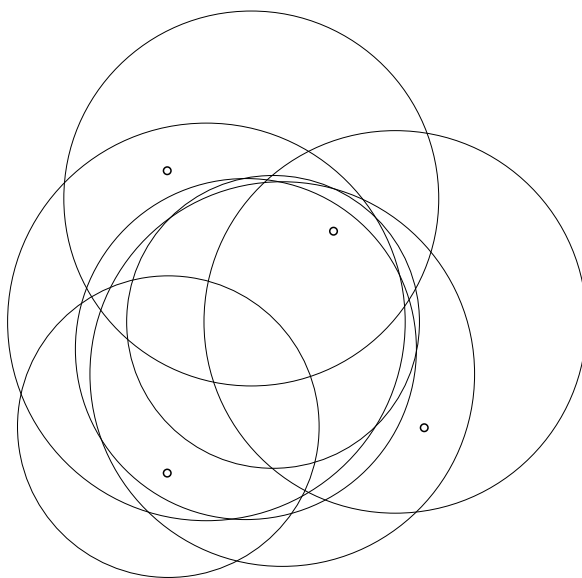
Merk op dat de punten uit de opgave niet op één cirkel liggen. Dus als  $C$  een cirkel is waar alle punten even ver vandaan liggen, dan verdeelt  $C$  de punten in twee groepen, de punten binnen  $C$  en de punten buiten  $C$ . Het kan niet zo zijn dat alle punten in één groep terechtkomen, want dan zouden ze alle vier even ver van het middelpunt  $M$  van  $C$  liggen en dan zouden ze toch op een cirkel liggen.

Als één van de groepen drie punten bevat dan ligt  $M$  op het snijpunt van de middelloodlijnen van die drie punten. Als beide groepen 2 punten bevat dan ligt  $M$  op het snijpunt van de middelloodlijnen van die twee paren. Hoe dan ook,  $M$  moet op het snijpunt van twee of drie middelloodlijnen liggen. Merk op dat er vier manieren zijn om de punten in een groepje van drie en een groepje van één te verdelen en drie manieren om de punten in twee groepjes van twee te verdelen.

Hieronder zie je een plaatje van alle middelloodlijnen.



Zoals je ziet zijn er inderdaat zeven snijpunten. Bij elk van deze snijpunten is er precies één cirkel die even ver van de vier gegeven punten aflight. Want als  $M$  bijvoorbeeld het snijpunt is van de middelloodlijnen van punten  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  dan ligt elke cirkel met middelpunt  $M$  even ver van  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  af. Dus als de straal zo gekozen wordt dat de afstand van de cirkel tot het vierde punt ook gelijk is, heb je één van de cirkels gevonden. Hieronder nog een plaatje met alle zeven cirkels.



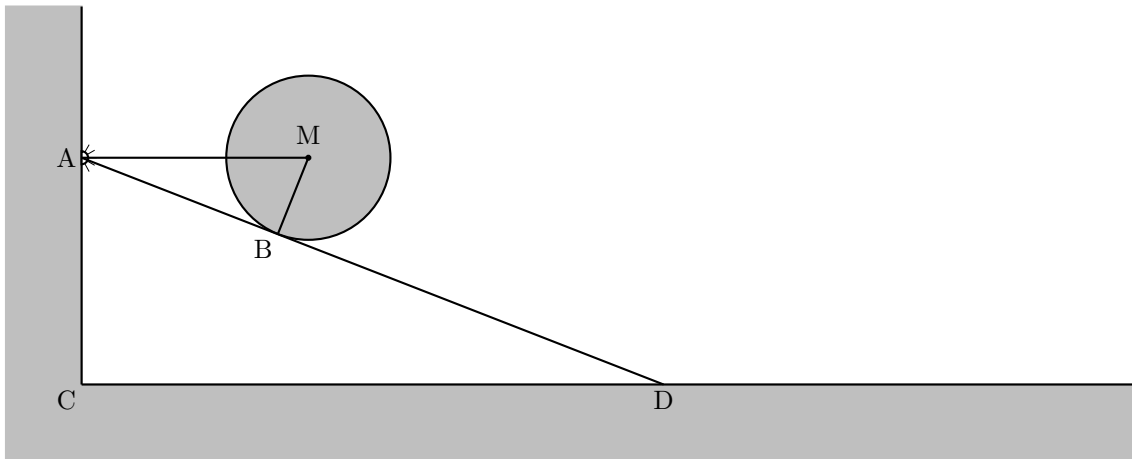
17

Neem aan dat  $n = s^a$ . Als  $1 \leq n \leq 9$  dan is  $s = n$  en  $a = 1$ , dus al deze getallen voldoen. Als  $10 \leq n \leq 99$ , dan  $a = 2$ . Dan  $n = s^2$ , dus moet  $n$  een kwadraat van twee cijfers zijn.

Alle kwadraten van twee cijfers zijn  $4^2 = 16$ ,  $5^2 = 25$ ,  $6^2 = 36$ ,  $7^2 = 49$ ,  $8^2 = 64$  en  $9^2 = 81$  maar alleen  $n = 81$  voldoet aan de eis. Als  $100 \leq n \leq 999$ , dan  $a = 3$ . Dan  $n = s^3$ , dus moet  $n$  een derdemacht van drie cijfers zijn. Alle kandidaten zijn  $5^3 = 125$ ,  $6^3 = 216$ ,  $7^3 = 343$ ,  $8^3 = 512$  en  $9^3 = 729$ . Hiervan voldoet alleen  $n = 512$ . In totaal zijn er dus elf getallen  $n$  kleiner dan 1000 met  $n = s^a$ .

18

Bekijk de figuur hieronder.  $AD$  is de raaklijn door  $A$  aan de cirkel, en  $B$  is het punt waar  $AD$  de cirkel raakt.



Gevraagd is de afstand  $CD$ . Merk op dat driehoeken  $BMA$  en  $CAD$  gelijkvormig zijn. Immers  $\angle CDA = \angle BAM$  omdat  $CD$  en  $AM$  evenwijdig zijn, en  $\angle ACD = \angle MBA = 90^\circ$ . Gegeven is dat  $AM = 13$  decimeter en  $BM = 5$  decimeter dus  $AB = 12$  decimeter. En uit de gelijkvormigheid halen we  $\frac{CD}{AB} = \frac{AC}{BM}$ . Dus  $CD = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5} = 31,2$  decimeter.

19

Stel er zijn positieve gehele getallen  $a$  en  $b$  zodat  $4n + 9 = a^2$  en  $9n + 4 = b^2$ . Dan kunnen we berekenen dat:

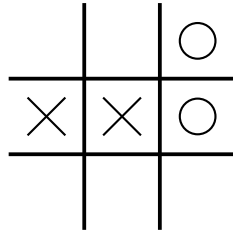
$$9a^2 - 4b^2 = 9(4n + 9) - 4(9n + 4) = 36n + 81 - 36n - 16 = 65 = 13 \cdot 5$$

Ook geldt dat  $9a^2 - 4b^2 = (3a + 2b)(3a - 2b)$ . Omdat 13 en 5 priem zijn en  $3a + 2b > 3a - 2b$  volgt dat  $3a + 2b = 13$  en  $3a - 2b = 5$  of  $3a + 2b = 65$  en  $3a - 2b = 1$ . Het eerste geval geeft  $a = 3$  en  $b = 2$  maar dat correspondeert met  $n = 0$ , dus dat is niet goed. Het tweede geval geeft  $a = 11$  en  $b = 16$  en dit geeft  $n = 28$ .

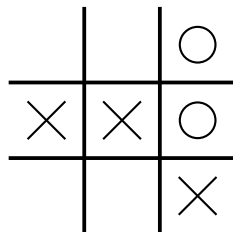
20

Alice heeft genoeg aan 37 euro. Ze wint dan als volgt:

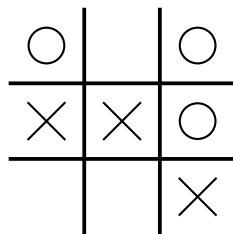
In de eerste bieding biedt Alice 37 euro en Bob moet wel 38 bieden. De volgende situatie ontstaat:



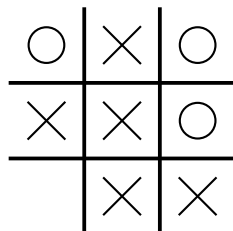
Alice heeft nog 37 euro en Bob nog 22. Alice moet de volgende bieding winnen en bied dus 22 euro.



Alice heeft nu nog 15 euro en Bob nog steeds 22. Bob moet nu 15 euro bieden om te voorkomen dat Alice meteen wint.



Nu heeft Alice nog 15 euro en Bob slechts 7 euro. Alice kan dus de volgende twee biedingen winnen met 7 respectievelijk 8 euro. En met twee zetten op rij maakt ze eenvoudig een drie-op-een-rij.



Op dezelfde manier ga je na dat met maar 36 euro het spelletje in gelijkspel zal eindigen. Dus 37 euro is het minimale bedrag waarmee Alice zeker kan winnen.