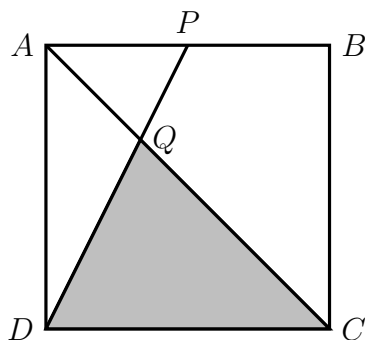


## Opgave 1 (20 punten, rest 480 punten)

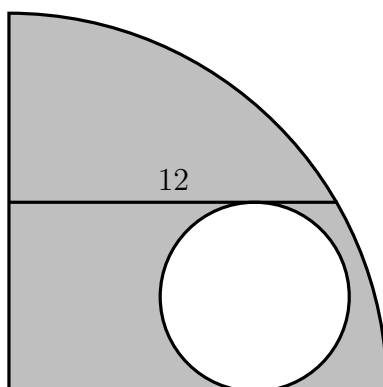
In een vierkant  $ABCD$  met zijden van lengte 1 verbinden we het hoekpunt  $D$  met het punt  $P$  midden op de zijde  $AB$ . We noteren het snijpunt van het lijnstuk  $DP$  met de diagonaal  $AC$  met  $Q$ .



*Wat is de oppervlakte van de driehoek  $DQC$ ?*

## Opgave 2 (30 punten, rest 450 punten)

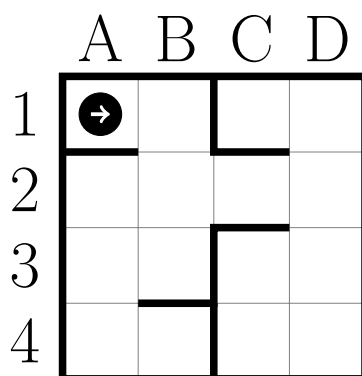
In de onderstaande figuur zie je een kwartschijf met daarin een kleinere schijf. De kleinere schijf raakt aan een rechte zijde van de kwartschijf en aan het getekende evenwijdige lijnstuk met lengte 12.



*Wat is de oppervlakte van het deel van de kwartschijf dat buiten de kleinere schijf ligt?*

### Opgave 3 (20 punten, rest 430 punten)

In onderstaand doolhof bevindt een robot zich op locatie A1 en kijkt naar rechts.



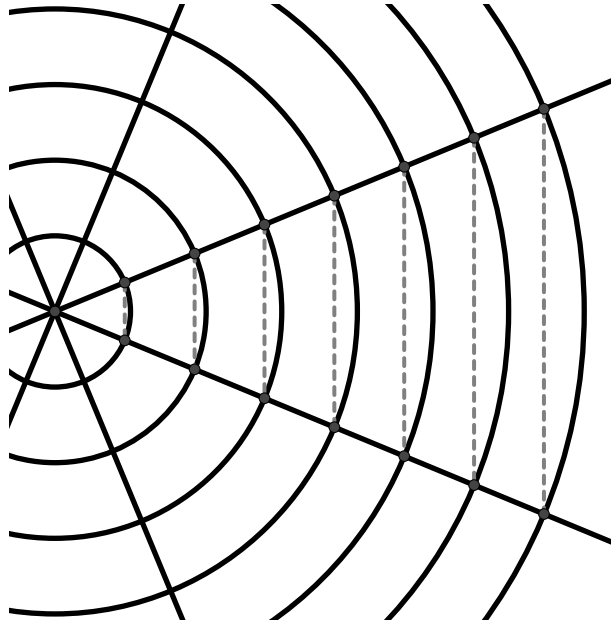
Elke dikke zwarte lijn stelt een muur voor waar de robot niet doorheen kan. Per minuut voert de robot één van de volgende bewegingen uit:

- als de robot zich kan verplaatsen in de richting waarin hij kijkt, dan verplaatst hij zich één vakje in die richting;
- als de robot zich niet in die richting kan verplaatsen, dan draait hij ter plaatse een kwartslag in wijzerzin (met de klok mee).

*Op welke locatie bevindt de robot zich na 2023 minuten?*

### Opgave 4 (30 punten, rest 400 punten)

Beschouw zeven concentrische cirkels met stralen  $a, 2a, \dots, 6a, 7a$ , waarbij  $a = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ . Vanuit het middelpunt vertrekken acht halfrechten zodat twee aangrenzende halfrechten telkens dezelfde hoek met elkaar maken. Door de snijpunten van zo'n paar aangrenzende halfrechten met elk van de cirkels te verbinden, ontstaan zeven koorden.



*Welk natuurlijk getal is het kwadraat van de som van de lengtes van deze zeven koorden?*

## Opgave 5 (20 punten, rest 380 punten)

Stel je een rekentoestel voor zoals in onderstaande figuur.

(	)	%	AC
7	8	9	÷
4	5	6	×
1	2	3	−
0	.	=	+

Het getal 5 034 927 618 kan op de volgende manier gevormd worden.

- Je kan van elk cijfer naar het volgende cijfer gaan door een paardensprong uit te voeren op het rekentoestel (dat wil zeggen: je gaat eerst twee stappen in horizontale richting en daarna één stap in verticale richting, of eerst twee stappen in verticale richting en dan één stap in horizontale richting).
- Je bent elk van de tien cijfers op het rekentoestel precies één keer tegengekomen.
- Onderweg ben je niet op een toets zonder cijfer of buiten het rekentoestel beland.

Er zijn niet zo veel tiencijferige natuurlijke getallen die op deze manier kunnen gevormd worden.

*Was is de som van al deze getallen?*

## Opgave 6 (30 punten, rest 350 punten)

*Hoeveel koppels gehele getallen  $(a, b)$  bestaan er zodat*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2023} ?$$

Merk op dat bij een koppel de volgorde een rol speelt:  $(2023, 0)$  en  $(0, 2023)$  zijn alvast twee verschillende oplossingen.

## Opgave 7 (20 punten, rest 330 punten)

Het product van de cijfers van een getal noemen we het *cijferproduct* van dat getal. Zo is het cijferproduct van 238 gelijk aan 48 aangezien  $2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$ . Het cijferproduct van 48 is 32 en dat van 32 is 6.

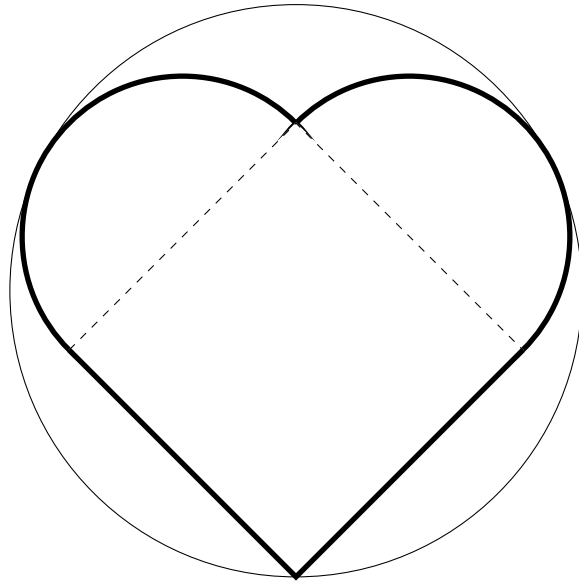
Als we het cijferproduct van een willekeurig natuurlijk getal herhaaldelijk berekenen, dan vinden we een rij van steeds kleiner wordende getallen tot we uiteindelijk bij een getal van één cijfer uitkomen, dat natuurlijk zijn eigen cijferproduct is. We noemen het aantal stappen tot het ééncijferige getal de *persistentie* van het getal waarvan we vertrokken.

Hierboven zagen we bijvoorbeeld dat 238 persistentie drie heeft omdat we na drie stappen een ééncijferig getal vonden ( $238 \rightarrow 48 \rightarrow 32 \rightarrow 6$ ).

*Wat is het kleinste natuurlijk getal met persistentie vier?*

## Opgave 8 (30 punten, rest 300 punten)

We maken een hartje door op twee aan elkaar grenzende zijden van een vierkant halve cirkels te plaatsen, met die zijden als middellijnen. Deze gaan dus door drie van de vier hoekpunten van het vierkant. Vervolgens tekenen we de omgeschreven cirkel van het hartje die de twee halve cirkels raakt en door het vierde hoekpunt van het vierkant gaat.



Veronderstel dat in het oorspronkelijke vierkant de zijde lengte 7 heeft.

*Wat is de straal van de omgeschreven cirkel?*

Geef je antwoord in de vorm  $a + b\sqrt{2}$  met  $a$  en  $b$  gehele getallen.

### Opgave 9 (20 punten, rest 280 punten)

Alice en Bob gooien een eerlijke munt die met 50% kans op kop valt en met 50% kans op munt. Ze spelen het volgende spel: ze gooien de munt net zolang totdat ofwel driemaal kop achter elkaar is gegooid, ofwel munt gevolgd door tweemaal kop. Als driemaal kop als eerste voorkomt, dan wint Alice. Bij munt kop kop wint Bob.

*Wat is de kans dat Alice het spel wint?*

### Opgave 10 (30 punten, rest 250 punten)

Een handelaar gebruikt een klassieke weegschaal zoals afgebeeld in onderstaande figuur om gewichten te meten. Hij wil alle gehele gewichten van 1 tot 40 kg hiermee kunnen wegen. Hiervoor zou hij 40 blokken van exact 1 kg kunnen gebruiken, maar hij wenst het aantal blokken te minimaliseren door gebruik te maken van zwaardere blokken.



Als de handelaar bijvoorbeeld één blok van 2 kg en één blok van 5 kg zou hebben, dan kan hij daarmee de gewichten 2, 3, 5 en 7 kg wegen.

*Wat zijn de gewichten (in kg) voor de minimale set van de blokken?*

Noteer in het antwoord de waarden van klein naar groot.

## Opgave 11 (20 punten, rest 230 punten)

*Wat zijn de twee laatste cijfers van het getal  $11^{2023}$ ?*

## Opgave 12 (30 punten, rest 200 punten)

Elke zaterdag spelen Katrien en Maren tennis van 17u tot 18u. De man van Katrien vertrekt thuis met de auto om stipt om 18u bij de tennisclub aan te komen en samen terug naar huis te rijden.

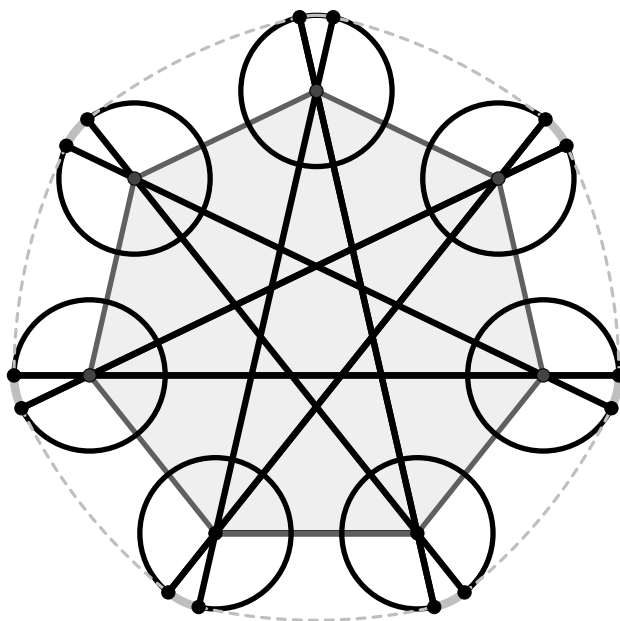
Afgelopen zaterdag kwam Katrien net aan op de tennis wanneer ze zich herinnerde dat Maren niet beschikbaar was om te tennissen. Ze belde haar man die thuis was op om haar te komen halen en vertrok daarna om 17u alvast te voet huiswaarts. Een tijdje later pikte haar man haar op en reden ze het resterende stuk samen met de auto naar huis. Zo kwamen ze uiteindelijk 20 minuten vroeger dan normaal samen thuis aan en bovendien zat de man van Katrien ook 20 minuten minder lang in de auto.

Je mag ervan uit gaan dat de man van Katrien altijd even snel rijdt.

*Hoeveel minuten heeft Katrien gewandeld?*

## Opgave 13 (20 punten, rest 180 punten)

Beschouw een regelmatige zevenhoek waarbij de langste diagonaal tussen twee hoekpunten lengte 6 heeft. In elk hoekpunt tekenen we een volledige cirkel met straal 1 alsook een stuk van de cirkel met straal 7 (de stippellijnen). De omhullende kromme van deze figuur bestaat dan uit stukjes cirkel waarvan de middelpunten de hoekpunten van de zevenhoek zijn en waarvan de stralen afwisselend 1 en 7 zijn.



*Hoe lang is de omhullende kromme?*

### Opgave 14 (30 punten, rest 150 punten)

Lars en Kristof vragen aan Anne wat haar favoriete getal is. Anne vertelt Lars wat het eerste cijfer is en Kristof wat het tweede cijfer is. Vervolgens zegt ze aan beiden dat haar favoriete getal voorkomt in de volgende lijst:

35, 36, 39, 57, 58, 74, 76, 94, 95, 97.

Lars bestudeert de lijst en zegt: “Ik weet niet wat Annes favoriete getal is en ik weet zeker dat Kristof het ook niet weet.”

Vervolgens antwoordt Kristof: “Oorspronkelijk wist ik inderdaad niet wat Annes favoriete getal is, maar nu weet ik het wel.”

Tot slot zegt Lars: “Dan weet ik het nu ook.”

*Wat is het favoriete getal van Anne?*

### Opgave 15 (20 punten, rest 130 punten)

Als  $x$  en  $y$  twee reële getallen zijn, dan noteren we met  $\min\{x, y\}$  het kleinste van die twee getallen en met  $\max\{x, y\}$  het grootste.

Stel nu dat het achttal  $(a_1, a_2, \dots, a_8)$  bestaat uit de getallen  $1, 2, \dots, 8$  in willekeurige volgorde. Elk van de getallen komt dus precies één keer voor.

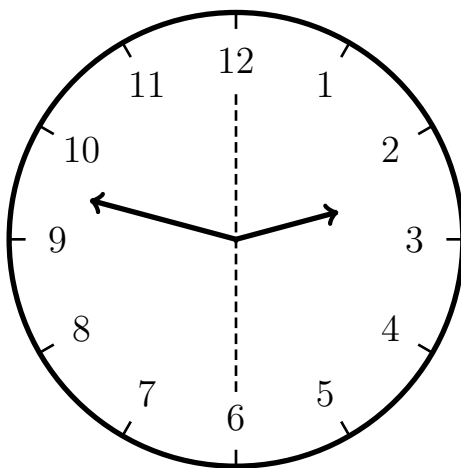
*Wat zijn de mogelijke waarden van*

$$\min\{\max\{\min\{a_1, a_2\}, \min\{a_3, a_4\}\}, \max\{\min\{a_5, a_6\}, \min\{a_7, a_8\}\}\} \text{ ?}$$

Noteer in het antwoord de waarden van klein naar groot.

## Opgave 16 (30 punten, rest 100 punten)

Op een moment tijdens deze Estafetteronde, dat wil zeggen ergens tussen 14u en 15u, zal de hoek tussen de twee wijzers van een analoge klok precies in twee gelijke delen gedeeld worden door een verticale rechte.



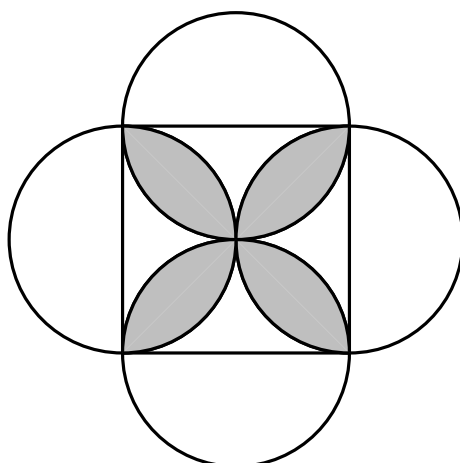
*Hoeveel minuten na 14u is dat het geval?*

Geef je antwoord als een onvereenvoudigbare breuk.

## Opgave 17 (20 punten, rest 80 punten)

Voor een vierkant met zijde 1 tekenen we vier schijven, die de zijden van het vierkant als middellijnen hebben. Het gebied dat hieronder donkergrijs gekleurd is, bestaat uit de punten die in minstens twee van die schijven liggen.





*Wat is de oppervlakte van het grijze gebied?*

### Opgave 18 (30 punten, rest 50 punten)

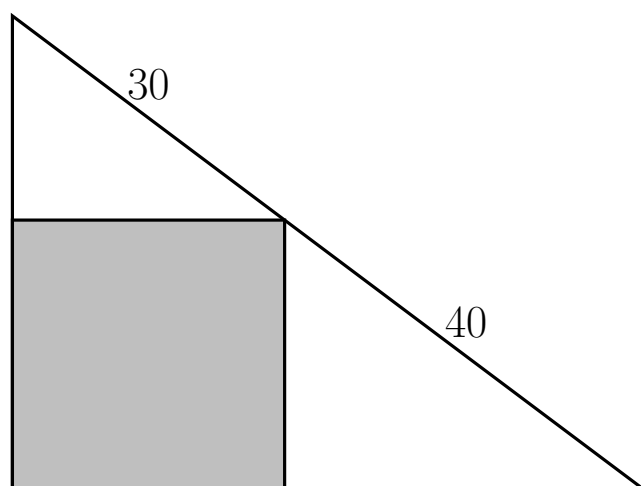
We schrijven het getal 2023 op die manier omdat  $2023 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$ . De keuze van het getal 10 is hierbij dus belangrijk en we noemen het de *basis* van ons decimaal talstelsel. Als we 2023 in het talstelsel met basis 9 schrijven, dan krijgen we  $2023 = (2687)_9$  aangezien  $2023 = 2 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^0$ .

We definiëren een *repeenheid* in basis  $b$  als een getal waarbij de uitdrukking in basis  $b$  enkel uit enen bestaat. Zo is 31 een repeenheid in basis 5 omdat  $31 = (111)_5$ .

*Wat is de som van alle priemgetallen die repeenheden zijn in basis 4 of in basis 9?*

### Opgave 19 (20 punten, rest 30 punten)

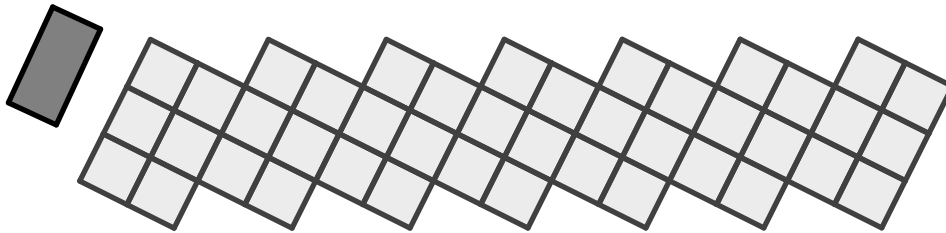
Een vierkant ligt in een rechthoekige driehoek zodat de rechthoekszijden deels samenvallen met zijden van het vierkant en de schuine zijde door een hoekpunt van het vierkant gaat. De schuine zijde wordt door het hoekpunt verdeeld in stukken van lengte 30 en 40.



*Hoe lang is de zijde van het vierkant?*

## Opgave 20 (30 punten, rest 0 punten)

Beschouw onderstaande lichtgrijze plattegrond, die bestaat uit 42 vierkantjes. We willen deze betegelen met 21 dominostenen, zoals er eentje in het donkergrijs getekend is. Eén dominosteen bedekt twee vierkantjes.



*Op hoeveel unieke manieren kan je de figuur volledig met dominostenen betegelen?*