
WISKUNDE-ESTAFETTE KUN 2002

60 Minuten voor 20 opgaven.

Het totaal aantal te behalen punten is 500

1 (20 punten)

In een zeker land zijn er munten van 1, 2 en 5 thaler in omloop. Je hebt van alle drie soorten ten minste één op zak. Als al die munten waarde 1 zouden hebben, had je 10 thaler minder. Hadden al die munten waarde 2, dan had je evenveel en als al die munten waarde 5 hadden had je 30 thaler meer. Hoeveel munten van 1, hoeveel van 2 en hoeveel van 5 thaler zou je op zak kunnen hebben? Geef een oplossing.

2 (30 punten)

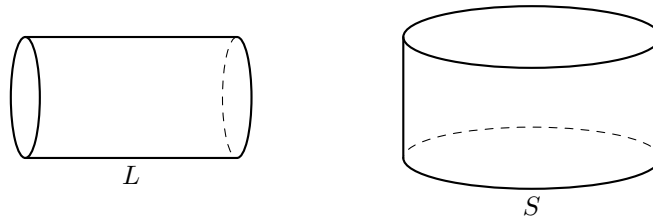
Wat is het laatste cijfer van $3^{2002} - 2^{2002}$?

3 (20 punten)

Van een functie f is gegeven dat $f(x) + xf(1-x) = x$ voor alle reële getallen x . Bereken $f(2)$.

4 (30 punten)

Een liggende cilinder L past precies in de staande cilinder S . De straal van de grondcirkel van S is 17; de hoogte van S is 16. Hoe groot is de inhoud van L ?



5 (20 punten)

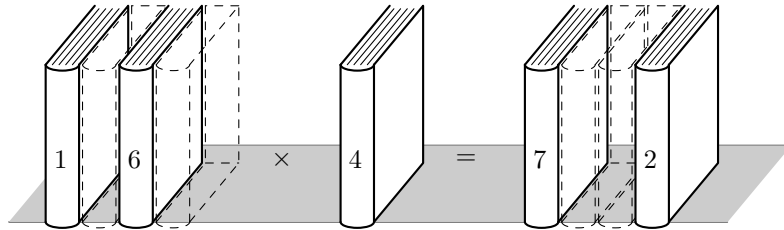
Zeg: V is een verzameling van onderling verschillende positieve gehele getallen, met deze twee eigenschappen:

- 1) het aantal elementen van V is 56,
- 2) elk vijftiental elementen van V bevat op zijn minst een even getal.

Zeg: S is de som van de elementen van V . Wat is de kleinste waarde die S kan hebben?

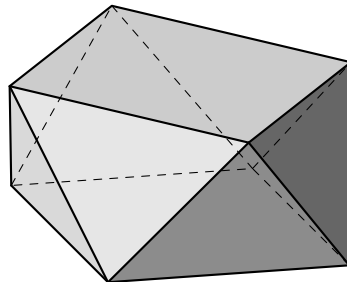
6 (20 punten)

Jan heeft de negen delen van het Handboek der Wiskunde zo in zijn kast opgesteld dat de rugnummers een correcte vermenigvuldiging uitbeelden. Geef aan op welke plaatsen de vier delen die nu even op zijn werktafel liggen, teruggezetz moeten worden.



7 (30 punten)

Zowel de onderkant als de bovenkant van een doos is een vierkant met zijden van lengte 1. Er zijn acht zijkanten; elke zijkant is een gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte 1. Hoe hoog is die doos?



8 (30 punten)

Op elk veld van een 8×8 bord zijn een schakelaar en een lamp bevestigd; als we een schakelaar omzetten veranderen de lamp op hetzelfde veld en ook de lampen op alle naburige velden van toestand: uit \rightarrow aan, aan \rightarrow uit. In het begin zijn alle lampen uit. Vervolgens zetten we regelsgewijs alle schakelaars om. Hoeveel lampen zijn er tenslotte aan? Voor alle duidelijkheid: naburige velden zijn velden die een zijde gemeen hebben.

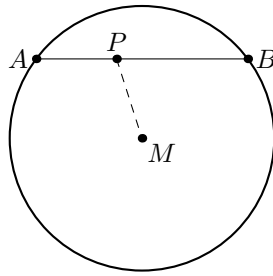
9 (20 punten)

Noem drie positieve gehele getallen p , q , r waarvoor geldt:

$$p^2 + q^2 = r^{10}.$$

10 (20 punten)

Zie figuur. De cirkel met middelpunt M heeft diameter 22. AB is een koorde met lengte 18. P ligt op het lijnstuk AB zo dat AP lengte 6 heeft. Hoe lang is het lijnstuk MP ?



11 (20 punten)

Vijf leerlingen: A , B , C , D en E , willen voor hun lerares wiskunde een verjaardagscadeautje kopen. Ze weten niet precies wanneer hun idool jarig is of hoe oud ze wordt, maar ieder beschikt wel over ten minste één van de volgende gegevens: haar leeftijd, de maand waarin, en de dag van de maand waarop ze jarig is.

- A denkt dat ze op 10 april 28 wordt.
- B denkt dat ze op 11 mei 30 wordt.
- C denkt dat ze op 11 mei 28 wordt.
- D denkt dat ze op 11 april 28 wordt.
- E denkt dat ze op 10 april 30 wordt.

Een van de vijf heeft de juiste gegevens. Wanneer is haar verjaardag, en hoe oud wordt ze dan?

12 (30 punten)

De huizen aan de Noordsingel hebben alle een oneven nummer. De nummers lopen van 1 t/m 57. De bewoner van het huis met nummer x merkt op dat de som van de huisnummers die kleiner zijn dan x gelijk is aan de som van de huisnummers die groter zijn dan x . Wat is zijn huisnummer?

13 (30 punten)

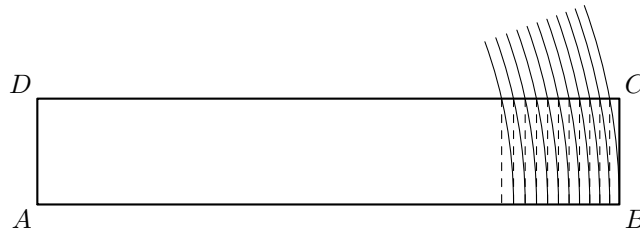
Van een hoek α die groter is dan 0° maar kleiner dan 45° , is gegeven dat

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{14}.$$

Bereken $\sin \alpha - \cos \alpha$.

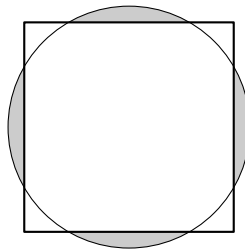
14 (20 punten)

$ABCD$ is een rechthoek van 2 bij 11. De cirkel met middelpunt A die door B gaat, snijdt CD in een punt waarvan we de projectie op AB met B_1 aangeven. De cirkel met middelpunt A die door B_1 gaat, snijdt CD in een punt waarvan we de projectie op AB met B_2 aangeven. De cirkel met middelpunt A die door B_2 gaat, snijdt CD in een punt waarvan we de projectie op AB aangeven met B_3 . Enzovoort. We gaan zo door totdat de cirkel te klein is en CD niet meer snijdt. Er ontstaat een eindige rij punten: $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$. Wat is het rangnummer n van het laatste punt?



15 (20 punten)



Zie figuur. Een vierkant waarvan de zijden lengte $2\sqrt{3}$ hebben en een cirkel met straal 2 hebben hetzelfde middelpunt. Hoe groot is de oppervlakte van elk van de vier vlakdelen die buiten het vierkant maar binnen de cirkel liggen?



16 (30 punten)

Een flatgebouw! Acht woonlagen; vijf woonkolommen: veertig eenpersoonswoningen. De woningen zijn genummerd zoals aangegeven. In dat gebouw wonen zeventien tweelingen: elke twee personen die een tweeling vormen zijn of elkaars linker(rechter)buur of elkaars beneden(boven)buur. Je kunt —voor het gebouw staande— zien dat de woningen 9, 17 en 39 leeg staan, terwijl 16 en 40 duidelijk bewoond worden. Er zijn nog drie woningen onbewoond en die drie liggen in een en dezelfde woonlaag.

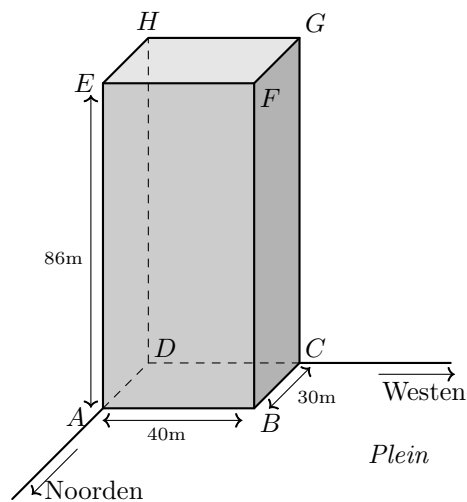
Wat zijn de nummers van die drie woningen?

36	37	38		
31	32	33	34	35
26	27	28	29	30
21	22	23	24	25
		18	19	20
11	12	13	14	15
6	7	8		10
1	2	3	4	5

17 (30 punten)

Een flatgebouw ligt met zijn noord- en westgevel aan een groot plein. Het is 86m hoog en heeft een plat dak. Zijn noord- en zuidgevels zijn 40m lang, zijn oost- en westgevels 30m. (Zie figuur: $ABCD$ is een rechthoek.) Op een zeker moment van een zonnige dag hebben de zonnestralen juist de richting van de lijn door het hoekpunt B en het midden van het lijnstuk dat D verbindt met het hoekpunt H .

Hoe groot is op dat moment de oppervlakte van de schaduw van het gebouw op het plein?



18 (30 punten)

Als een zekere roltrap stilstaat loop je in 30 seconden naar boven. Als de roltrap loopt en je staat zelf stil op de roltrap dan ben je in 60 seconden boven. Hoe lang duurt het voor je boven bent als je loopt op de lopende roltrap?

19 (20 punten)

Wat is de grootste gemeenschappelijke deler van de $75 (= 5 \times 5 \times 3)$ getallen die kunnen worden geschreven als zesrijtjes $abcabc$ met

a uit $\{1, 3, 5, 7, 9\}$,

b uit $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ en

c uit $\{0, 4, 8\}$.

20 (30 punten)

Een kleine bol ligt op een grote bol. De grote bol heeft een straal die tweemaal zo groot is als die van de kleine. In de figuur geven de punten b en B aan: het bovenste punt van de kleine resp. van de grote bol; de punten r en R de meest rechtse punten van de kleine resp. de grote; v en V de voorste; a en A de achterste; l en L de meest linkse; o en O de onderste. De kleine bol wordt over de boog BR van de grote bol naar R gerold, vervolgens over de boog RV van de grote bol naar V en tenslotte over de boog VB naar B . Geef in het plaatje op het antwoordvel de plaatsen aan die de punten b, r, v, a, l, o van de kleine bol dan innemen.

