
WISKUNDE-ESTAFETTE 2012

60 Minuten voor 20 opgaven.

Het totaal aantal te behalen punten is 500

1 (20 punten)

Optellen

De som van twee getallen van twee cijfers is een getal van drie cijfers (geen van deze getallen begint met een 0):

$$\begin{array}{r} - \\ - + \\ \hline - - \end{array}$$

Elk cijfer van 0 t/m 6 komt één keer voor.

Wat is het getal van drie cijfers?

2 (30 punten)

Hoeveel nullen

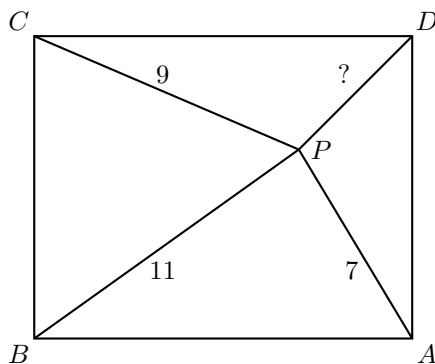
Het getal $10^{2012} - 1$ is deelbaar door $10^4 - 1$.

Hoeveel nullen staan er in de uitkomst van $\frac{10^{2012}-1}{10^4-1}$?

3 (20 punten)

Rechthoek

Gegeven zijn een rechthoek $ABCD$ en een punt P binnen deze rechthoek zo dat $|AP| = 7$, $|BP| = 11$ en $|CP| = 9$.



Hoe groot is $|DP|$?

4 (20 punten)

Hoeveel spreken er de waarheid?

Er zijn tien mensen op een receptie.

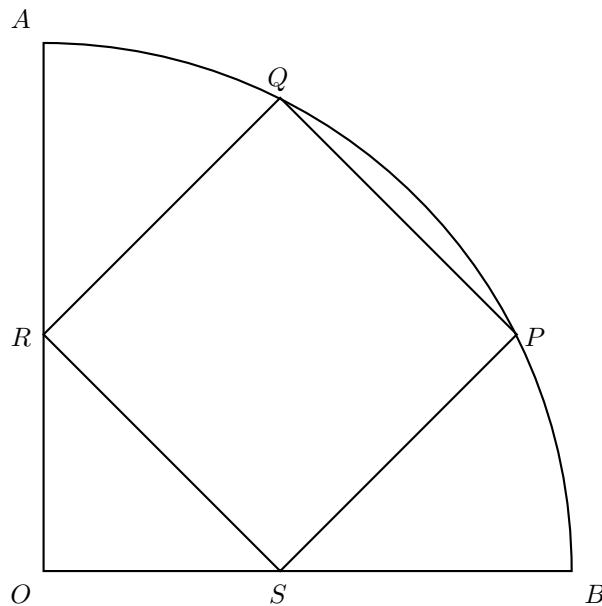
- Persoon 1 zegt dat hij precies 0 anderen de hand heeft geschud op de receptie.
- Persoon 2 zegt dat hij precies 1 ander de hand heeft geschud op de receptie.
- Persoon 3 zegt dat hij precies 2 anderen de hand heeft geschud op de receptie.
- \vdots
- Persoon 10 zegt dat hij precies 9 anderen de hand heeft geschud op de receptie.

Wat is het grootste aantal personen die de waarheid gesproken kunnen hebben?

5 (20 punten)

Kwartcirkel

Beschouw een kwartcirkel OAB met middelpunt O en straal 1. Een vierkant $PQRS$ wordt ingeschreven in deze kwartcirkel, met de punten P en Q op de boog AB , R op het lijnstuk OA en S op het lijnstuk OB .



Wat is de oppervlakte van dit vierkant?

6 (30 punten)

Klok

Beschouw een klok, waarvan de urenwijzer en de minutenwijzer beide lengte 1 hebben en zich continu over de wijzerplaat bewegen. Er is een moment tussen 12 uur en half 1 waarop de uiteinden van de twee wijzers zich exact op afstand 1 van elkaar bevinden.

Hoeveel volle seconden zijn er op dit moment sinds 12 uur verstreken?

7 (30 punten)

Geen kwadraat of derdemacht

Beschouw de rij van alle positieve gehele getallen die geen kwadraat of derdemacht van een geheel getal zijn, in oplopende volgorde.

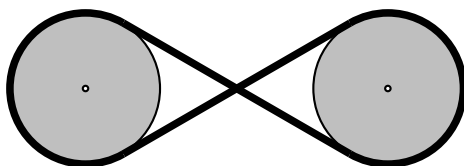
2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ...

Op welke plek staat 2012 in deze rij?

8 (30 punten)

Band

Een band loopt om twee wielen met straal 1, waarvan de assen afstand 4 hebben.



Hoe lang is de band?

9 (20 punten)

Product en som

Voor welke positieve gehele getallen x bestaat er een positief geheel getal y waarvoor

$$xy = x + 4y$$

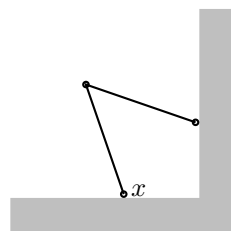
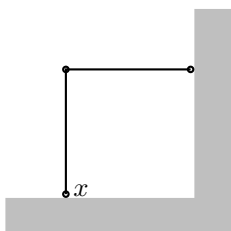
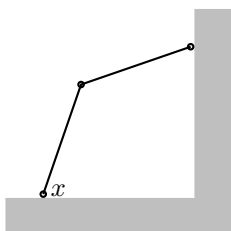
Geef alle mogelijkheden.

Opmerking: 0 is niet positief.

10 (30 punten)

Terrein afbakenen

Een sloot maakt een rechte hoek. Een kampeerder heeft drie palen en een touw van 10 meter. Daarmee gaat hij een symmetrisch gebied langs de sloot afbakenen. Twee van de palen komen aan de slootkant even ver van de hoek, de derde paal komt op gelijke afstand van beide slootkanten. Dit kan op allerlei manieren:



Bij welke hoek x (zie figuur) is de oppervlakte van het afgebakende gebied het grootst?

11 (20 punten)

Geheel deel en fractioneel deel

Voor een positief getal x definiëren we het gehele deel $[x]$ als het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x . Ook definiëren we het fractionele deel $\{x\}$ van x door $\{x\} = x - [x]$.

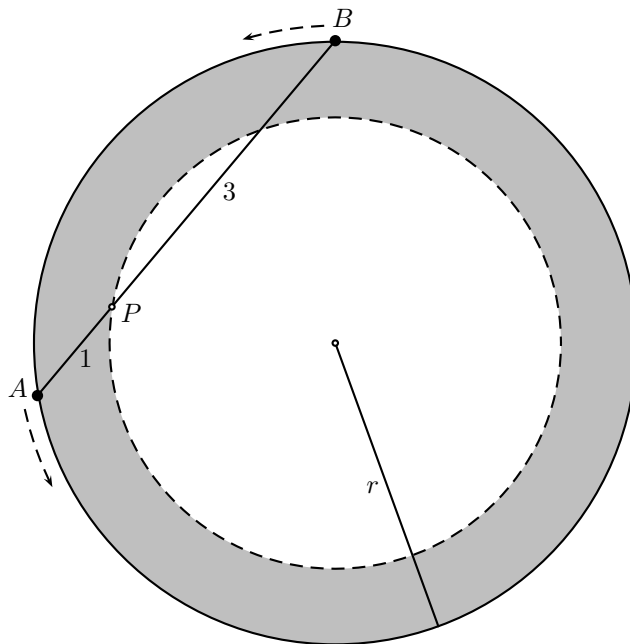
Voor hoeveel positieve getallen x die kleiner zijn dan 2012, geldt dat

$$x = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}}?$$

12 (30 punten)

Oppervlakte

Binnen een cirkel met straal r draait een lijnstuk met zijn eindpunten A en B op de cirkelrand. Het lijnstuk heeft lengte 4. Op het lijnstuk ligt een punt P zo dat $|AP| = 1$ en $|BP| = 3$. In P bevindt zich een pen. Als het lijnstuk een volledige omwenteling maakt, beschrijft de pen een cirkel.



Hoe groot is de oppervlakte van de ring tussen deze cirkel en de grote cirkel?

13 (20 punten)

Zo snel mogelijk naar 01

We beschouwen alleen getallen van 01 t/m 98. In deze opgave schrijven we de getallen

1 t/m 9 met een 0 ervoor.

Met een getal kun je twee verschillende stappen doen:

- Je telt 1 bij het getal op.
- Je verwisselt de cijfers van het getal.

Merk op dat je bij 98 alleen de tweede stap kan doen. Door deze stappen herhaaldelijk toe te passen, krijg je een route van één getal naar een ander getal. Bijvoorbeeld

12, 13, 14, 41, 42

is een route van 12 naar 42 in vier stappen.

Bij een begingetal zoeken we de kortste route om op 01 uit te komen (dat wil zeggen met zo min mogelijk zetten).

Bij welk begingetal is de kortste route het langst.

14 (30 punten)

Zo veel mogelijk eigenschappen

We zoeken positieve gehele getallen van twee cijfers met zo veel mogelijk van de volgende eigenschappen.

- De som van de cijfers is 10.
- Het is een 7-voud plus 2.
- Het is de som van twee kwadraten (die niet 0 zijn).
- Het is een 3-voud.
- Het is oneven.
- Het is 55.

Welk getal van twee cijfers heeft het meeste van deze eigenschappen?

15 (20 punten)

Repeterende breuk

De decimale breuk van $\frac{1}{4711}$ is repeterend. Hij begint zo: 0,0002122691573.... Het repeterende blok begint meteen na de komma, dat wil zeggen: met 0002.

Wat zijn de laatste twee cijfers van het repeterende blok?

16 (30 punten)

Balans

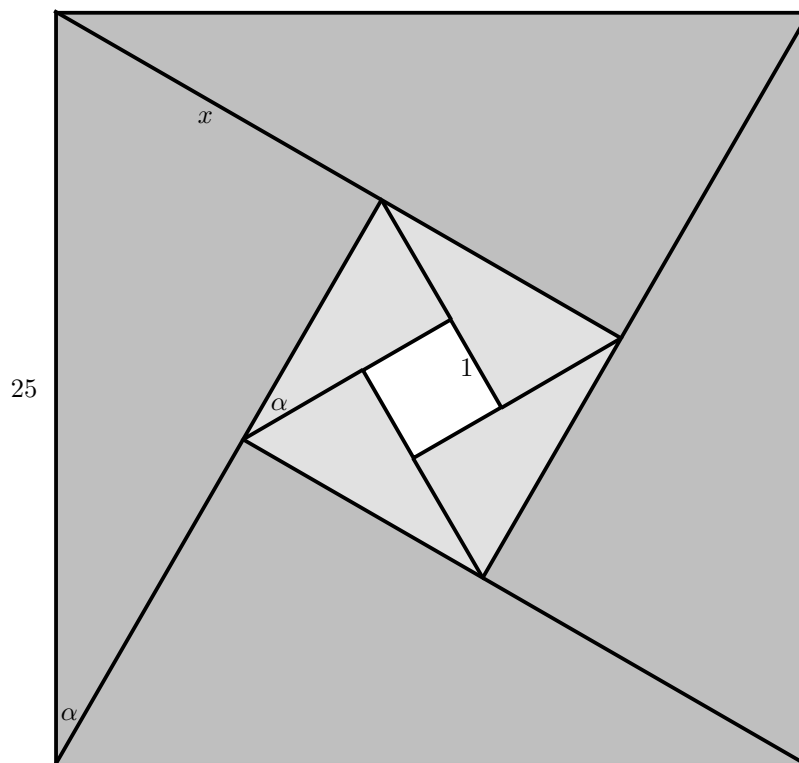
Gegeven een balans en drie gewichten die elk een geheel aantal kilo's wegen. Als je een zak rijst krijgt waarvan je alleen weet dat hij een geheel aantal kilo's weegt en niet meer

dan 27 kilo, dan kan je met behulp van de balans en de drie gewichten te weten komen hoe zwaar de zak rijst is. Hierbij mag je aan beide kanten van de balans gewichten plaatsen. Hoe zwaar zijn de drie gewichten?

17 (20 punten)

Drie vierkanten in elkaar

Drie vierkanten liggen in elkaar zoals in de tekening hieronder. De met een α aangegeven hoeken zijn gelijk. Het grootste vierkant heeft zijde 25, het kleinste heeft zijde 1. In de tekening is de afstand x tussen een hoekpunt van het grootste vierkant en het dichtstbijzijnde hoekpunt van het middelste vierkant aangegeven.

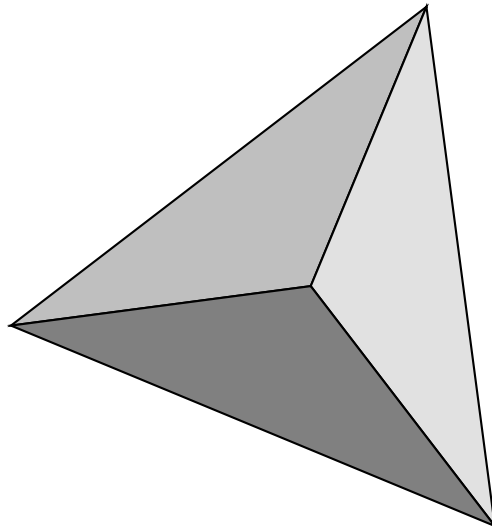


Hoe groot is x ?

18 (20 punten)

Tetraëder

Een tetraëder is een regelmatig viervlak. De vier zijvlakken zijn gelijkzijdige driehoeken. Zie het plaatje:



In de ruimte is een tetraëder gegeven.

Hoeveel vlakken in de ruimte zijn er met gelijke afstand tot de vier hoekpunten van het tetraëder?

19 (30 punten)

Geheeltallige oplossingen

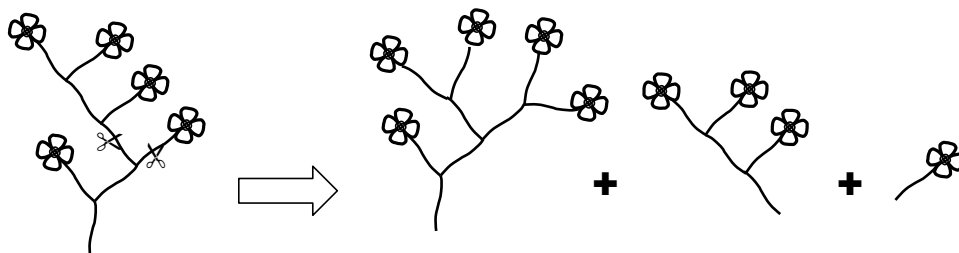
Wat is het kleinste gehele getal a groter dan 1 zodat er een geheel getal b bestaat waarvoor geldt:

$$5a^2 - 4b^2 = 1$$

20 (30 punten)

Bizynia

De plant bizynia begint als één steel met één bloem. Telkens als een steel wordt doorgesneden, ontstaat er 's nachts een vertakking in twee stelen, elk met één bloem. Bijvoorbeeld:



Ole Ander doorsnijdt van de bizynia in zijn tuin vijf stelen, waardoor 5 nieuwe vertakkingen ontstaan. De afgesneden bloemen wil hij morgen aan zijn vrouw Kori geven voor haar

verjaardag, voor elk jaar een bloem. Terwijl Kori blij is met de bloemen, is de bizynia in de tuin veel kleiner geworden. De plant heeft nu nog maar de helft van de bloemen die ze had voordat Ole ging snijden en slechts $\frac{29}{59}$ van de stelen.

Hoe oud is Kori geworden?