
WISKUNDE-ESTAFETTE 2013

Uitwerkingen

1

We geven twee oplossingen. De eerste oplossing ligt meer voor de hand. De tweede oplossing is rekentechnisch iets eenvoudiger.

Oplossing 1: Er zijn 9 getallen met 1 cijfer, $99 - 9 = 90$ getallen met 2 cijfers, $999 - 99 = 900$ getallen met 3 cijfers, en $2013 - 999 = 1014$ getallen met 4 cijfers. Het totaal aantal cijfers is dus

$$\begin{array}{rcccccccl} 9 \times 1 & + & 90 \times 2 & + & 900 \times 3 & + & 1014 \times 4 & = \\ 9 & + & 180 & + & 2700 & + & 4056 & = 6945 \end{array}$$

Oplossing 2: We tellen eerst voor elk jaartal vier cijfers: $4 \times 2013 = 8052$. Vervolgens trekken we tientallen, honderdtallen en duizendtallen af die niet voorkomen: 9 tientallen, 99 honderdtallen en 999 duizendtallen. Het antwoord is dus

$$\begin{aligned} 8052 - 9 - 99 - 999 &= 8052 + 3 - 10 - 100 - 1000 \\ &= 8055 - 1110 = 6945 \end{aligned}$$

2

$\triangle ABS$ is gelijkzijdig. Derhalve zijn $\angle BAS$ en $\angle SBA$ gelijk aan 60 graden. $\angle BAQ$ en $\angle PBA$ zijn de helft daarvan, 30 graden dus.

De horizontale afstand tussen A en Q is $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, evenals de horizontale afstand tussen P en B . De horizontale afstand tussen A en B is 1. Derhalve is de horizontale afstand tussen P en Q gelijk aan $\sqrt{3} - 1$. Omdat P en Q op dezelfde hoogte liggen, is dit ook de afstand tussen P en Q .

Opmerking: Vanwege de bolling van de cirkel is de hoogte van P niet het gemiddelde van die van A en S .

3

Het positieve gehele getal van één cijfer is een deler van $2009 - 5 = 2004$. Verder ligt het tussen 5 en 10. Omdat 7, 8 en 9 geen delers van 2004 zijn, moet het positieve gehele getal van één cijfer wel 6 zijn. En de rest van de deling van 2013 door 6 is 3.

4

De oppervlakte van $\triangle PBC$ is $\frac{1}{2} \times PB \times BC$, en de aanname is dat dit een derde is van de gehele oppervlakte van rechthoek $ABCD$. Dus $\frac{1}{2} \times PB \times BC = \frac{1}{3} \times AB \times BC$. De verhouding tussen AB en PB is dus $3 : 2$. Derhalve is de verhouding tussen AP en PB gelijk aan $1 : 2$.

5

Stel dat s de snelheid in km/u is en t de reistijd in uren. Voor de afstand a geldt

$$a = st = (s + 10)(t - \frac{30}{60}) = (s - 10)(t + \frac{36}{60})$$

Trekken we nu st af, dan krijgen we

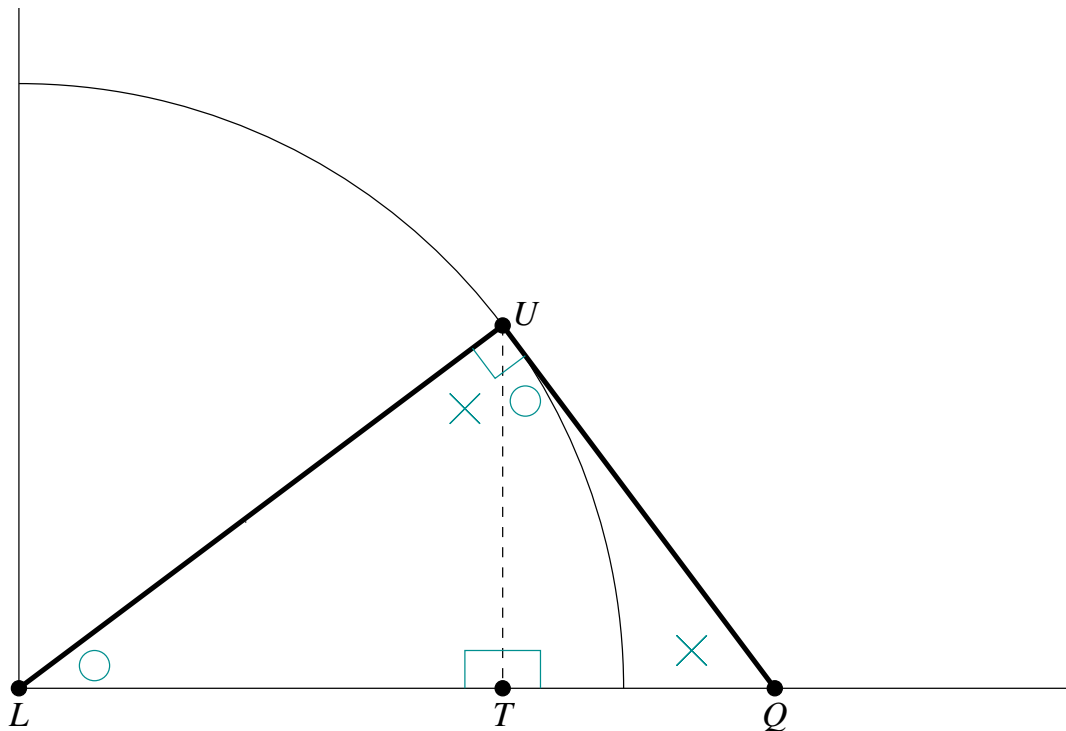
$$0 = 10t - \frac{30}{60}s - \frac{30}{6} = -10t + \frac{36}{60}s - \frac{36}{6}$$

Tellen we het middelste lid en het rechterlid op, dan krijgen we $0 = 0 + \frac{6}{60}s - \frac{66}{6}$, dus $s = 110$. Uit het middelste lid leiden we vervolgens af dat $10t - 55 - 5 = 0$, dus $t = 6$ en $a = st = 660$.

Opmerking: Als je de snelheid in kilometer per 6 minuten neemt en de tijd in eenheden van 6 minuten, is het rekenwerk eenvoudiger. De eerste grote vergelijking wordt dan $st = (s + 1)(t - 5) = (s - 1)(t + 6)$ en de tweede wordt dan $0 = t - 5s - 5 = -t + 6s - 6$, wat $s = 11$ en $t = 60$ oplevert.

6

Scharnier V tussen de twee deurhelften volgt een cirkelpad met straal 8 om scharnier L , welke op zijn plaats blijft. Noem het punt waar V is op het moment dat de deurhelften loodrecht op elkaar staan U . Noem het punt waar R dan is Q . Noem de loodrechtprojectie van U op de rail T .



Voordat V op punt U is geweest, wordt de sneeuw weggeduwd volgens de cirkelboog die V beschrijft. De sneeuwrand is dus hol achter punt U .

Nadat V op punt U is geweest, doet de lange deurhelft niet meer mee met het wegduwen van de sneeuw, omdat ze binnen $\triangle LQU$ blijft. De uiteinden V en R van de korte deurhelft doen ook niet meer mee aan het wegduwen van de sneeuw, omdat V met de lange deurhelft binnen $\triangle LQU$ blijft en R op de rail langs het huis loopt.

Je kunt geen gat maken met alleen het rechte stuk tussen de uiteinden van een lat. Een sneeuwrand gemaakt met een lat, zonder dat de uiteinden van die lat daaraan meedoen, kan derhalve niet hol zijn. Dus gaat de sneeuwrand op punt U over van hol naar niet-hol. Punt U is dus hetzelfde als punt P en het antwoord is de afstand tussen U en T .

Volgens de stelling van Pythagoras is LQ 100 cm. Omdat $\triangle LUQ$ gelijkvormig is met $\triangle LTU$ (of $\triangle UTQ$), is $TU : LU = QU : LQ$ (of $TU : QU = LU : LQ$). Dus het antwoord is

$$TU = \frac{LU \times QU}{LQ} = \frac{80 \times 60}{100} = 48 \text{ cm}$$

Opmerking: Het niet-holle stuk is ook daadwerkelijk bol, dat wil zeggen dat er geen rechte stukken in zitten. Het heeft echter nogal wat voeten in de aarde om dit aan te bewijzen. Wie echt wilt weten hoe het zit, kan het bewijs nalezen op <http://www.math.ru.nl/~debondt/bollesneeuw.pdf>. Hierin wordt ook aangetoond dat de sneeuwrand glad is.

7

We geven twee oplossingen. Voor de eerste oplossing hoef je de vergelijking minder om te schrijven. De tweede oplossing geeft alle oplossingen door middel van een berekening.

Oplossing 1: Omdat $\frac{1}{m} > 0$, is $n > 8$. Omdat $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}$, is $n \leq 16$. We verdelen dus de getallen $n = 9$ tot en met $n = 16$ onder de groepsleden, en berekenen voor elke n of er een bijbehorende m is, en zo ja, welke.

Als je aantoonst dat $n = 9$ de enige mogelijke oneven n is, hoef je alleen nog $n = 10$, $n = 12$ en $n = 14$ na te gaan, want $n = m = 16$ is een oplossing.

Stel dat n oneven is. Dan is $\text{ggd}(8, n) = 1$, en dus is het rechterlid van

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{8} - \frac{1}{n} = \frac{n-8}{8n}$$

een niet verder te vereenvoudigen breuk. Derhalve is $n-8 = 1$. Dus $n = 9$ en $m = 72$.

Oplossing 2: Uit $\frac{1}{m} = \frac{n-8}{8n}$ (zie boven) volgt dat

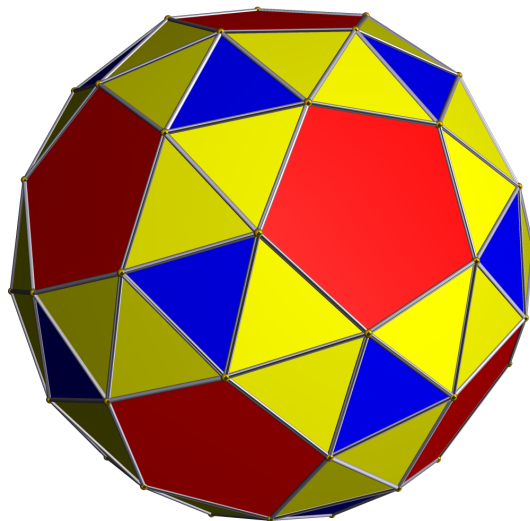
$$m = \frac{8n}{n-8} = \frac{8n-64}{n-8} + \frac{64}{n-8} = 8 + \frac{64}{n-8}$$

Dus $n-8$ is een deler van 64. Omdat $n \leq 16$ (zie boven), is $n-8$ gelijk aan 1, 2, 4 of 8. Dus n is gelijk aan 9, 10, 12 of 16. Hieruit volgt dat $(9, 72)$, $(10, 40)$, $(12, 24)$ en $(16, 16)$ de oplossingen zijn.

Opmerking: Ook voor $m \in \{16, 24, 40, 72\}$ geldt, dat $m-8$ een deler is van 64.

8

De twaalf vijfhoeken hebben tezamen 60 hoeken. Bij elk van die hoeken komen vier driehoeken bij elkaar. Dit levert 240 hoeken van driehoeken. Daarmee hebben we elke hoek van een driehoek precies eenmaal gehad. Dus is het aantal driehoeken gelijk aan $240/3 = 80$.



Opmerking: niet alle driehoeken zijn gelijkwaardig. Er zijn 20 driehoeken die elk aan drie vijfhoeken raken (blauw in de figuur); deze komen overeen met de 20 hoekpunten van een regelmatig twaalfvlak (ofwel de 20 zijvlakken van een regelmatig twintigvlak). De overige 60 driehoeken grenzen met een zijde aan een van de twaalf vijfhoeken (geel in de figuur).

9

Stel, dat je van uitspraak $n + 1, n + 2, n + 3, \dots, 20$ weet of ze waar of onwaar zijn, waarbij $1 \leq n \leq 15$. Als van uitspraak n tot en met $n + 4$ een oneven aantal waar is, is uitspraak $n + 5$ waar. Zo niet, dan is uitspraak n niet waar. In beide gevallen is van uitspraak n tot en met $n + 5$ een even aantal waar. Omdat je van uitspraak $n + 1$ tot en met $n + 4$ al weet of ze waar of onwaar zijn, kun je het al dan niet waar zijn van uitspraak n afleiden.

Dit levert een manier om het al dan niet waar zijn van alle uitspraken af te leiden van uitspraak 15 tot en met 1, in die volgorde.

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
waar	onwaar	onwaar	onwaar	waar	onwaar	waar	onwaar	onwaar	onwaar

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
waar	onwaar	waar	onwaar	onwaar	onwaar	waar	onwaar	waar	onwaar

Het kan echter sneller. Omdat van elk zestal opeenvolgende uitspraken een even aantal waar is, is het al dan niet waar zijn van uitspraak n hetzelfde als dat van uitspraak $n + 6$. Dus het al dan niet waar zijn van uitspraak 1, 2, 3, 4, 5 is hetzelfde als dat van 19, 20, 15, 16, 17, in die volgorde.

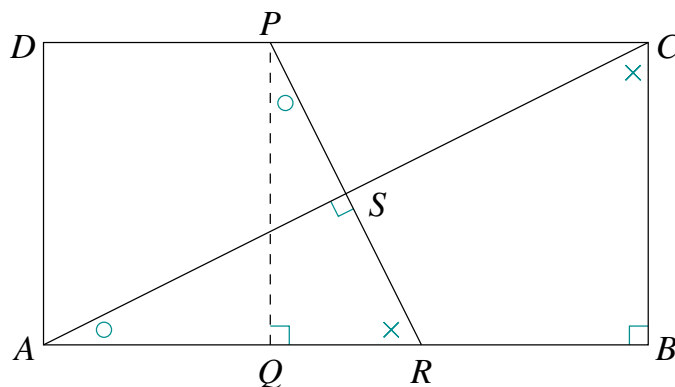
10

Laat a het aantal arbeiders zijn. Dan is $a \times 12 = (a - 3) \times 14$, oftewel $2a = 42$. Dus $a = 21$ en $a - 7 = 14$. We moeten dus $14x = 21 \times 12$ oplossen. Na het uitdelen van een factor 7 krijgen we $2x = 3 \times 12$, dus $x = 18$.

Opmerking: Je kunt snel inzien dat er meer dan 16 dagen nodig zijn. Als je vervolgens 17, 18 en 19 invult op het antwoordblad, bespaar je veel tijd.

11

Noem de hoekpunten van de rechthoek $ABCD$, zoals hieronder aangegeven. Stel dat we A en C op elkaar vouwen. Dan is de vouwlijn de middelloodlijn van AC , zeg RP zoals hieronder aangegeven. Neem voor Q de loodrechtprojectie van P op AB en voor S het snijpunt van AC met PR .



Omdat de vouwlijn PR loodrecht staat op de lijn AC , is $\triangle ASR$ gelijkvormig met $\triangle ABC$. Evenzo is $\triangle PQR$ gelijkvormig met $\triangle ASR$. Dus $\triangle PQR$ is gelijkvormig met $\triangle ABC$. Hieruit volgt dat

$$PR = \frac{PR}{1} = \frac{PR}{PQ} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

12

De Y kan niet in het hokje boven de P geplaatst worden, omdat de rest van de hokjes dan niet meer aan elkaar zit. Er zijn dus vier mogelijke hokjes voor de Y. We tonen nu aan dat het voor de plaatskeuze van de overige letters niet uitmaakt welk hokje we kiezen. De oplossingen waarbij we Y in een gegeven rij in de tweede kolom plaatsen, gaan via spiegeling over in de oplossingen waarbij we Y in dezelfde rij in de vierde kolom plaatsen, en vice versa. De oplossingen waarbij we Y in een gegeven kolom in de bovenste rij plaatsen, gaan via het verwisselen van de letters van die kolom over in de oplossingen waarbij we Y in dezelfde kolom in de onderste rij plaatsen, en vice versa.

	Y		Y	
	Y	P	Y	

			Y	T
		P		T

Dus we kunnen voor elke plaatskeuze van Y, uit de oplossingen voor die Y de oplossingen voor de andere plaatskeuzes van Y afleiden, en elke keuze van Y levert evenveel oplossingen. We kiezen daarom Y als in het voorbeeld, en onthouden 4 als vermenigvuldigingsfactor. De T kan niet onder de Y en ook niet links van de Y gekozen worden. Er zijn dus twee mogelijke hokjes voor de T. Voor de plaatskeuze van de overige letters maakt het weer niet uit welk hokje we kiezen, omdat we de letters in de vijfde kolom ongestraft kunnen verwisselen, net als bij de Y. We kiezen daarom T als in het voorbeeld, en de vermenigvuldigingsfactor wordt $4 \times 2 = 8$.

			Y	T
		P		H

	O	G	Y	T
	O	P	A	H

De H moet onder de T staan. Ook de positie van de eerste A en de G zijn uniek bepaald. De O kan op twee manieren worden geplaatst. Voor de plaatskeuze van de drie laatste letters maakt het niet uit welk hokje we kiezen voor de O, omdat alle vier overgebleven hokjes onderling aan elkaar grenzen. De vermenigvuldigingsfactor wordt $4 \times 2 \times 2 = 16$.

R	O	G	Y	T
R	R	P	A	H

A	O	G	Y	T
R	A	P	A	H

De R en de tweede A kunnen op respectievelijk drie en twee manieren gekozen worden en de plek van de laatste letter S is uniek. Het antwoord is dus $4 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 96$.

Opmerking: In het voorbeeld grenst het hokje van de S aan het hokje van de P. Dus het laatste hokje grenst aan het eerste hokje, zodat we een kring van aangrenzende hokjes krijgen. Bij zo'n kring kunnen de R en de tweede A op respectievelijk 2 en 1 manieren gekozen worden, en is het antwoord derhalve $4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 32$.

13

We presenteren drie oplossingen, in volgorde van toenemende wetenschappelijkheid.

Oplossing 1: Met tien deelnemers lukt het niet, want met vijf deelnemers met 60 punten en vijf deelnemers met 100 punten heb je al een gemiddelde van 80 punten. We vullen dus 11, 12 en 13 in op ons antwoordenvel en gaan snel door met de volgende vraag.

Oplossing 2: De verhouding $(100 - 76) : (76 - 60)$ is $3 : 2$. We hebben dus minstens anderhalf keer zoveel scores van 60 nodig als scores van 100. Dat zijn $7\frac{1}{2}$ scores van 60. Naar boven afgerond levert dat 13 deelnemers in totaal.

Het aantal van 13 deelnemers is inderdaad mogelijk, namelijk met 7 scores van 60 punten en 1 score van 68 punten. Omdat 68 het gemiddelde is van 60 en 76, komt de score van 68 punten overeen met 60 punten voor een halve deelnemer.

Oplossing 3: Als er n deelnemers zijn, is de laagst mogelijk totaalscore $5 \times 100 + (n-5) \times 60 = 5 \times 40 + n \times 60$. Dus we hebben

$$5 \times 40 + n \times 60 \leq n \times 76$$

Dit is equivalent met $5 \times 40 \leq n \times 16$, ofwel $25 \leq 2n$. Derhalve is het aantal deelnemers n ten minste 13. En

$$\frac{5 \times 100 + 7 \times 60 + 1 \times 68}{13} = \frac{500 + 420 + 68}{13} = \frac{988}{13} = 76$$

14

Uit de vergelijking volgt, dat

$$x^3 - 197 = 3xy + y^3 > 0$$

Derhalve moet x minstens 6 zijn. Na het vinden van y bij $x = 6$, $x = 7$, $x = 8$ en $x = 9$ heb je twee oplossingen (x, y) bij elkaar geharkt. Hieronder volgt een bewijs dat er geen andere oplossingen zijn.

Schrijf $x = y + t$. De vergelijking

$$x^3 - y^3 = 3xy + 197$$

komt dan neer op

$$(y^3 + 3y^2t + 3yt^2 + t^3) - y^3 = (3y^2 + 3yt) + 197$$

wat zich laat herschrijven tot

$$3y(y+t)(t-1) = 197 - t^3$$

Omdat $x^3 - y^3 > 0$, is $x > y$, en dus $t - 1 \geq 0$. Derhalve is $197 - t^3$ niet negatief. Dus $t < 6$. Verder moet 3 een deler zijn van $197 - t^3$. Omdat 198 een drievoud is, moet 3 ook een deler zijn van $t^3 + 1$. Derhalve komen alleen $t = 2$ en $t = 5$ in aanmerking.

Als $t = 2$, dan hebben we $3y(y+2) = 189$, ofwel $y(y+2) = 63$, wat $(x, y) = (9, 7)$ levert.

Als $t = 5$, dan hebben we $12y(y+5) = 72$, ofwel $y(y+5) = 6$, wat $(x, y) = (6, 1)$ levert.

Opmerking: Het ligt misschien meer voor de hand, de vergelijking te herschrijven tot

$$3y^2 + 3ty = \frac{197 - t^3}{t - 1}$$

Dit is namelijk een kwadratische vergelijking in y , waarop we de abc -formule kunnen toepassen. Het levert echter iets meer rekenwerk op als we zo y uit t afleiden.

15

We plaatsen de oorsprong van het Cartesische vlak in het midden van het vierkant, zo dat de hoekpunten van het vierkant worden beschreven door $(\pm 3, \pm 3)$.

De x -coördinaat van het meest rechtse hoekpunt van de achthoek kunnen we vinden door de lijnstukken door dit punt met elkaar te snijden: $-3 + 2x = y = 3 - 2x$. Dit levert $4x = 6$, dus $x = 1\frac{1}{2}$. De vier hoekpunten van de achthoek die op een as liggen zijn dus $(\pm 1\frac{1}{2}, 0)$ en $(0, \pm 1\frac{1}{2})$.

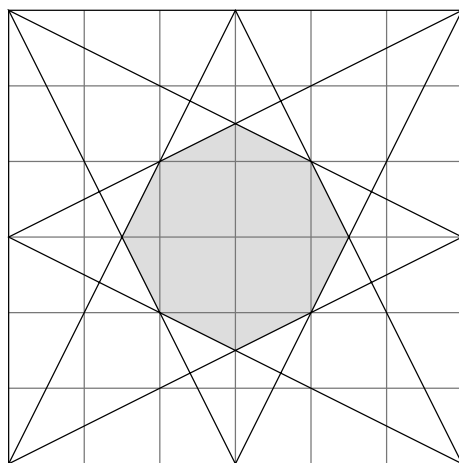
Op dezelfde manier bepalen we de x -coördinaat van het hoekpunt rechtsboven, waarbij we gebruiken dat $(1\frac{1}{2}, 0)$ het bovenste hoekpunt is: $1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = y = 3 - 2x$. Dit levert $1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}$, dus $x = 1$. De vier hoekpunten van de achthoek die niet op een as liggen worden dus beschreven door $(\pm 1, \pm 1)$.

De afstand tussen het meest rechtse hoekpunt en het hoekpunt rechtsboven is

$$\sqrt{1^2 + (1\frac{1}{2} - 1)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Dit is de lengte van een van de acht zijdes, dus het antwoord is $8 \times \frac{1}{2}\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Opmerking: Als je netjes een rooster van 6×6 tekent, dan kun je zien dat een zijde van de achthoek $\frac{1}{6}$ deel van een scheef lijnstuk van lengte $3\sqrt{1^2 + 2^2} = 3\sqrt{5}$ is. Dat gaat veel sneller dan het berekenen ervan.



16

Er zijn in totaal $8!$ volgordes van sokken en schoenen. De helft daarvan voldoet niet, omdat daarbij de eerste schoen voor de eerste sok staat, terwijl de eerste schoen na de eerste sok wordt aangetrokken. Weer de helft van de helft die wel voldoet, voldoet niet, omdat daarbij de tweede schoen voor de tweede sok staat. Als we nu doorgaan tot de laatste sok en schoen, houden we

$$\frac{8!}{2^4} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{2 \times 8} = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 60 \times 42 = 2520$$

volgordes over.

17

Het begin van de decimale breuk is 0,211011. De laatste twee cijfers van dit beginstuk zijn hetzelfde als drie cijfers eerder, dus komen dezelfde cijfers telkens terug en is de decimale

breuk is $0,211011011\dots$. Omdat $0,999999999\dots = 1$, is

$$\begin{aligned} 0,211011011\dots &= 0,2 + 11 \times 0,001001001\dots \\ &= \frac{1}{5} + \frac{11}{999} \times 0,999999999\dots \\ &= \frac{999}{5 \times 999} + \frac{55}{5 \times 999} = \frac{1054}{5 \times 999} \end{aligned}$$

We moeten dus laten zien dat de laatste breuk niet verder te vereenvoudigen is. De laatste formule vertelt ons dat $\text{ggd}(999, 1054) = \text{ggd}(999, 55) = 1$. Omdat $\text{ggd}(5, 1054) = 1$, is de laatste breuk inderdaad gereduceerd.

Opmerking: Als je niet gelooft dat $0,999999999\dots = 1$, stel dan dat $x = 0,999999999\dots$. Dan is

$$9x = 10x - x = 9,999999999\dots - 0,999999999\dots = 9$$

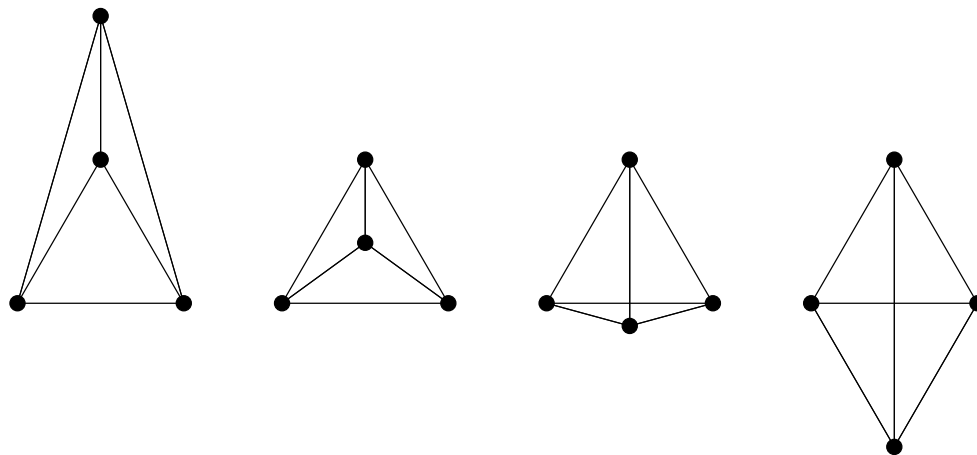
zodat $x = 1$. Of stel meer direct dat $y = 0,211011011\dots$. Dan is

$$9990y = 10000y - 10y = 2110,110110\dots - 2,110110\dots = 2108$$

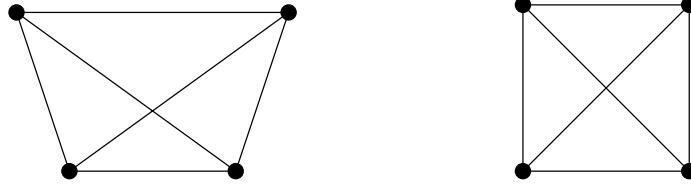
$$\text{zodat } y = \frac{2108}{9990} = \frac{1054}{4995}.$$

18

We bekijken eerst de configuraties die een regelmatige driehoek bevatten, die we naar boven wijzend weergeven. Het vierde punt heeft ten hoogste twee verschillende afstanden met de punten van de driehoek, dus we mogen aannemen dat het vierde punt gelijke afstand heeft met de onderste twee punten van de driehoek. Het vierde punt ligt dus op de middelloodlijn van de onderste zijde van de regelmatige driehoek. We vinden zo vier oplossingen.



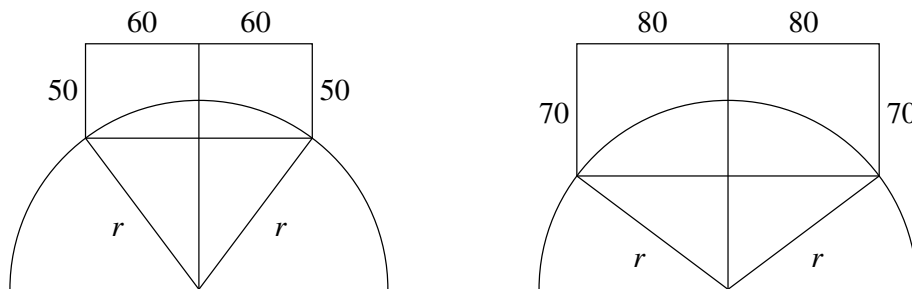
Vervolgens beschouwen we de configuraties die geen regelmatige driehoek bevatten. Stel dat een punt A dezelfde afstand x heeft tot de overige punten, die we B , C en D noemen. Omdat $\triangle ABC$ niet regelmatig is, is de afstand tussen B en C ongelijk aan x . Net zo zijn de andere twee afstanden tussen twee punten van B , C en D ongelijk aan x . Dus $\triangle BCD$ is regelmatig. Tegenspraak, dus elk punt heeft twee verschillende afstanden met de overige punten.



Is er een punt waarvoor geldt dat een van de drie overige punten dichtter bij ligt en twee van de overige punten verder weg, dan vinden we als oplossing vier van de vijf hoekpunten van een regelmatige vijfhoek. Zo niet, dan vinden we als oplossing de hoekpunten van een vierkant.

19

Noem de straal van de bol r . We kunnen nu de afstand tussen het midden van de bol en het midden van het tafelblad op twee manieren berekenen: via de korte as en via de lange as.



Dit levert de volgende vergelijking op voor r .

$$\sqrt{r^2 - 60^2} + 50 = \sqrt{r^2 - 80^2} + 70$$

Trekken we 50 af en kwadrateren we beide zijden, dan krijgen we

$$r^2 - 60^2 = r^2 - 80^2 + 40\sqrt{r^2 - 80^2} + 400$$

wat op hetzelfde neerkomt als

$$40\sqrt{r^2 - 6400} = 80^2 - 60^2 - 400 = 6400 - 3600 - 400 = 2400$$

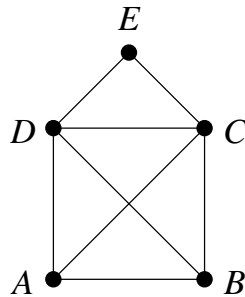
Delen we door 40 en kwadrateren we opnieuw, dan krijgen we

$$r^2 - 6400 = 3600$$

Hieruit volgt dat $r = 100$.

20

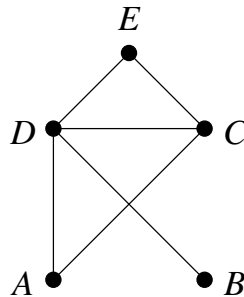
Noem de vijf punten A tot en met E , zoals in de linker figuur aangegeven. Bij de punten A en B komen een oneven aantal lijnen samen. Bij de overige punten komen een even aantal lijnen samen. Derhalve zijn A en B het beginpunt en het eindpunt. Omdat we de richting van de tekening niet meetellen, kunnen we aannemen dat we bij A beginnen en bij B eindigen.



Er zijn acht mogelijke keuzes voor het tweede en het derde punt, waarvan we de eerste vier, lexicografisch gezien, afzonderlijk behandelen.

- $ABC \dots B$.

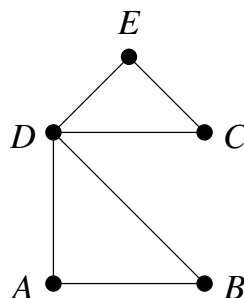
Na het trekken van lijnstuk AB en BC houden we de volgende figuur over.



Het laatste lijnstuk moet DB zijn. Voor de rest gaan we twee keer met de pen van C naar D en een keer van D naar C . Hiervoor zijn drie routes: via A , via E en direct. Deze routes kunnen in elke volgorde genomen worden, wat $3! = 6$ mogelijkheden geeft.

- $ACB \dots B$.

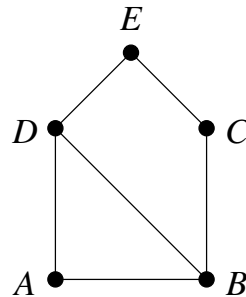
Na het trekken van lijnstuk AC en CB houden we de volgende figuur over.



Vervolgens dienen we $\triangle BDA$ te tekenen vanuit B . Het tekenen van die driehoek onderbreken we op punt D , om vanuit dat punt $\triangle DCE$ te tekenen. Omdat we beide driehoeken in twee richtingen kunnen tekenen, levert dit geval $2 \times 2 = 4$ mogelijkheden.

- $ACD \dots B$.

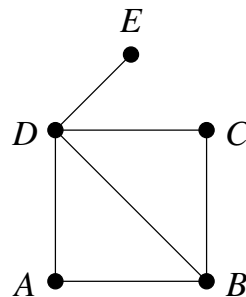
Na het trekken van lijnstuk AC en CD houden we de volgende figuur over.



Nu zijn er drie routes van D naar B om te tekenen. Dit levert net als in het eerste geval 6 mogelijkheden.

- $ACE \dots B$.

Na het trekken van lijnstuk AC en CD houden we de volgende figuur over.



Na lijnstuk ED hebben we weer drie routes tussen D en B te gaan, en dus weer 6 mogelijkheden.

Bij de laatste vier keuzes van het tweede en derde punt, komt de pen eerder op punt D dan op punt C , in tegenstelling tot bovenstaande vier keuzes. We krijgen deze laatste vier keuzes door in de eerste vier C en D te verwisselen. Voor het aantal mogelijkheden maakt het verwisselen van C en D niet uit, dus de laatste vier keuzes geven evenveel oplossingen als de eerste vier. Het antwoord is dus $2 \times (6 + 4 + 6 + 6) = 2 \times 22 = 44$.