
WISKUNDE-ESTAFETTE RU 2007

Uitwerkingen

1

Zelfs als alleen maar gegeven is dat in elke rij een A, een B, een C en een lege plek voor moet komen is er maar één oplossing; we lichten dit nu toe. Ten behoeve van de toelichting nummeren we de vierkantjes, als volgt:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

We onderscheiden twee gevallen:

- Op plek 1 staat een A.

Als op plek 5 een A stond dan zou het kolomgewijs lezen beginnen met AA. Dus moet de A in de tweede rij op plek 6 staan, en is plek 5 leeg. Op plekken 7 en 8 staat dus B respectievelijk C. Als de A in de derde rij op plek 10 stond dan zou het kolomgewijs lezen AA bevatten. Dus moet de A in de derde rij op plek 11 staan en de B op plek 12. Om soortgelijke reden moet de A in de vierde rij op plek 16 staan.

Volgens wat we nu hebben ingevuld zou het kolomgewijs lezen moeten eindigen op CBACBA, of CBAXCBA voor zekere letter X, maar geen van beide is het geval.

- Plek 1 is leeg.

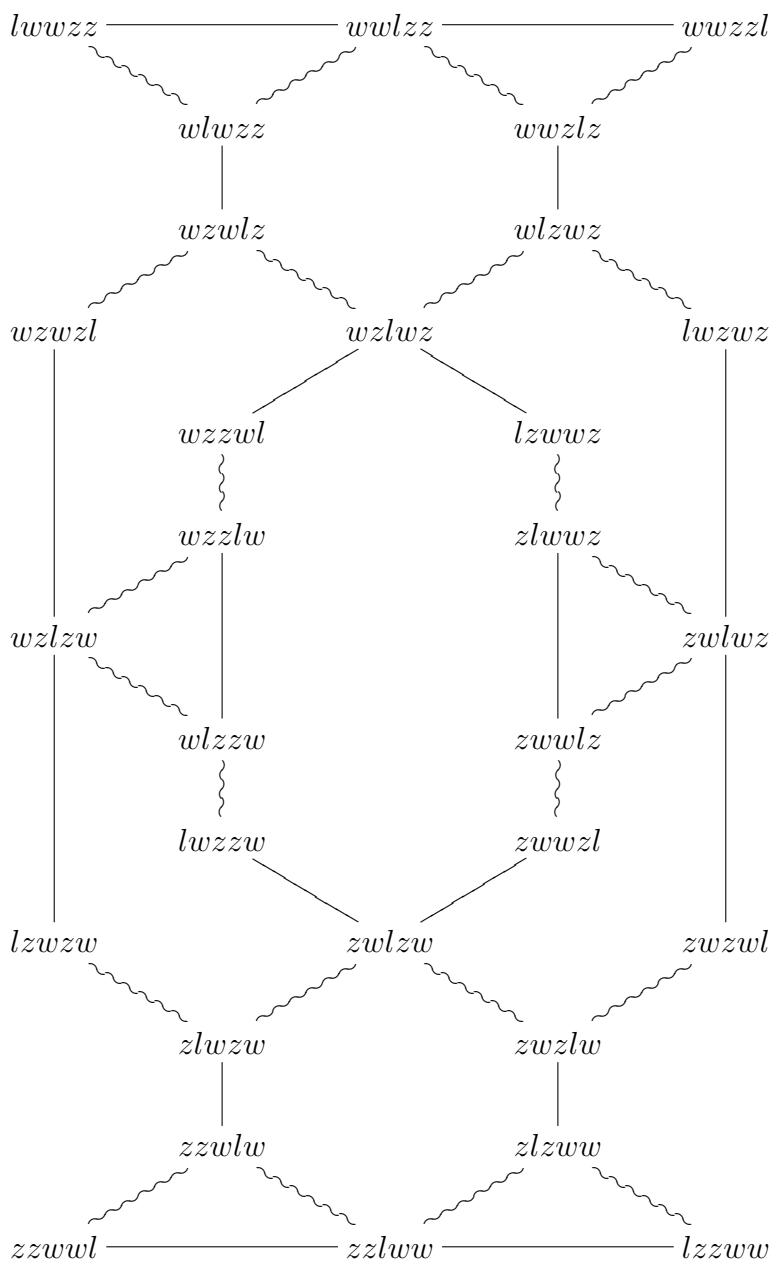
Op plekken 2 en 3 en 4 staat dan A respectievelijk B en C. Als de C in regel 2 op plek 8 stond dan zou kolomgewijs lezen CC bevatten. Dus staat de C in regel 2 op plek 7, en is plek 8 leeg. Op plekken 5 en 6 staat dus A respectievelijk B. De C en B die bij kolomgewijs lezen tussen de eerste en tweede A voorkomen moeten de plekken 9 en 13 vullen. De C die bij kolomgewijs lezen tussen de tweede en derde B voorkomt kan niet op plek 10 staan en moet dus op plek 14 staan. Dus plek 10 is leeg en de A en B in de derde rij staan op plekken 11 respectievelijk 12. De laatste A bij kolomgewijs lezen staat natuurlijk op plek 16.

We komen zo uit op het volgende plaatje:

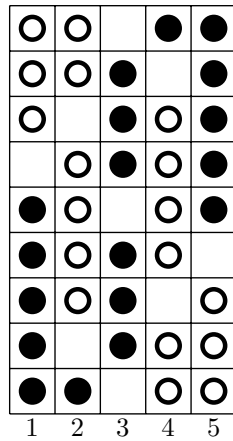
	A	B	C
A	B	C	
C		A	B
B	C		A

2

In het volgende schema zijn alle 30 mogelijke standen opgeschreven: we noteren w voor een witte steen, z voor een zwarte steen en l voor een leeg veld. Twee standen zijn verbonden door een rechte lijn als de ene stand uit de andere ontstaat door een sprongzet, en door een slangelijijn als de ene stand uit de andere ontstaat door een schuifzet.

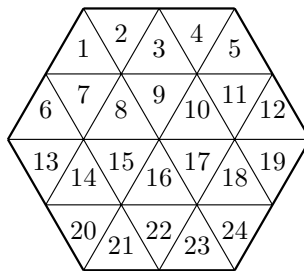


Het diagram maakt duidelijk dat elke route van de bovenrand naar de onderrand minstens vier sprongzetten en vier schuifzetten vergt, en dat de routes langs de linkerrand of rechterrand dat ook realiseren. De oplossing kan worden weergegeven in het volgende filmpje:



3

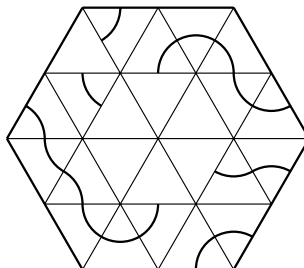
Voor de bespreking nummeren we de 24 velden van de zeshoek als volgt:



In de eerste fase kunnen velden 3,7,11,14,18,19,22 en 23 worden ingevuld:

- Omdat het boogje in veld 2 de grens met veld 3 niet treft, mag het boogje in veld 3 dat ook niet doen. Het boogje in veld 3 verbindt dus rechterkant en onderkant. Een soortgelijk verhaal geldt voor veld 7 (uit veld 6), veld 18 (uit veld 24), veld 19 (uit veld 12) en veld 22 (uit veld 23).
- Het is duidelijk dat een boogje in veld 11 de boogjes in velden 5 en 12 moet verbinden. Evenzo moet een boogje in veld 14 de boogjes in velden 13 en 20 verbinden.

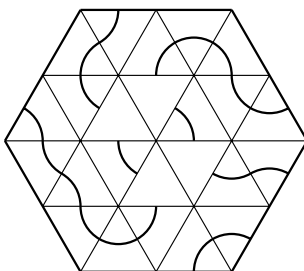
We houden dan de volgende puzzel over:



In de tweede fase kunnen velden 1,10 en 15 worden ingevuld:

- Het boogje in veld 10 treft niet de grens met veld 11, en het boogje in veld 15 treft niet de grens met veld 14.
- Het boogje in veld 1 verbindt de boogjes in velden 2 en 7.

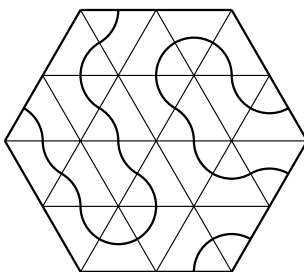
We houden dan de volgende puzzel over:



In de derde fase kunnen ten slotte de resterende velden 8, 9, 16 en 17 worden ingevuld:

- Het boogje in veld 8 verbindt de boogjes in velden 7 en 15, het boogje in veld 9 verbindt de boogjes in velden 3 en 10, het boogje in veld 16 verbindt de boogjes in velden 15 en 22, en het boogje in veld 17 verbindt de boogjes in velden 10 en 18.

We eindigen dus met de volgende figuur



4

In elke horizontale strook van lengte 7 komen alle kleuren één keer voor. Dus in de laatste 14 kolommen komen alle kleuren precies $2 \times 17 = 34$ keer voor. Ook in elke verticale strook van lengte 7 komen alle kleuren één keer voor. Dus in de bovenste 14 rijen van de eerste drie kolommen komen ze allemaal 6 keer voor. De 3×3 velden linksonder schieten dus over, en daar komt blauw drie keer voor.

5

Ad is in ieder geval de jongste. Dus van de personen die Dirk ziet, kunnen alleen Ben en Cor ouder zijn. Dus die moeten dat ook zijn. Bovendien is Ed ouder dan de vier al genoemde personen. We hebben nu al 5 personen hun plaats gewezen:

Ed, Cor, Ben, Dirk, Ad

en moeten alleen Fred nog plaatsen. Maar dat is gemakkelijk omdat hij iedereen kan zien: alleen de twee oudsten (Ed en Cor) zijn ouder dan hij.

6

De vierkantjes die een even aantal burens hebben, bijvoorbeeld twee (zoals vierkantje 1 of 2) of vier (zoals vierkantje 5) verschieten een even aantal keren van kleur en eindigen groen. De vierkantjes die een oneven aantal burens hebben (namelijk 4, 8, 11, 12, 21, 22, 25 en 29 die er elk drie hebben) verschieten een oneven aantal keren van kleur en eindigen rood.

7

Noteer a, b, c voor de drie cijfers van x . Dan is $x = 100a + 10b + c$ en de verdubbelde omgekeerde is $200c + 20b + 2a$. We moeten dus oplossen:

$$102a + 30b + 201c = 2007$$

Hieruit blijkt dat c oneven is, en omdat $102a + 30b \leq 102 \cdot 9 + 30 \cdot 9 = 1188$ ook dat $c > 3$. We houden de volgende mogelijkheden over:

$$c = 5, \quad 34a + 10b = 334$$

$$c = 7, \quad 34a + 10b = 200$$

$$c = 9, \quad 34a + 10b = 66$$

We zoeken dus veelvoudens van 34 met het goede laatste cijfer. In het eerste geval is $a = 1$ of $a = 6$, maar dan blijft er 300 respectievelijk 130 over voor $10b$. In het laatste geval is $a = 4$ of $a = 9$, maar dan blijft er een negatief getal over voor $10b$. In het middelste geval is $a = 0$ of $a = 5$, en dan blijft er 200 respectievelijk 30 over voor $10b$. Alleen dat laatste is mogelijk, dus is $a = 5$ en $b = 3$.

8

Alle kubusjes uit de sliert liggen in de centrale $3 \times 3 \times 3$ kubus. We geven een sliert weer door in elk van de drie 3×3 lagen de posities van de kubusjes met een x aan te geven. Er is in ieder geval een oplossing met 16 kubusjes als volgt:

x		x	x		x
x		x			
x	x	x			

Er is ook een oplossing met 16 kubusjes als volgt:

x	x	x	x		x
x	x	x	x		x

maar dat is eigenlijk de vorige oplossing na een rotatie van de grote kubus. Er is nog een andere oplossing met 16 kubusjes als volgt:

x	x	x				x	x	x
x		x				x		x
x	x	x				x	x	x

Dat zijn eigenlijk twee tunnels, maar het voldoet wel aan de twee eisen.

Alvorens we aantonen dat het niet beter kan, merken we eerst op dat elke oplossing een even aantal kubusjes bevat. Kleur namelijk in gedachten de kubusjes om en om wit en zwart, zodat elk wit kubusje alleen zwarte burens heeft en elk zwart kubusje witte burens. Als je in een tunnel rondloopt tot je in je uitgangspunt terugkeert dan verandert de kleur telkens als je het volgende kubusje binnengaat, maar op het eind is de kleur hetzelfde als aan het begin. Je bent dus een even aantal keren een volgend kubusje binnengegaan.

We moeten nu inzien dat het niet met 18 kubusjes kan. We onderscheiden drie gevallen:

- Er is een laag met 8 kubusjes.
Dat kan maar op één manier, met alleen het centrale kubusje ongebruikt. Omdat elk kubusje al twee burens heeft, moet de volgende laag ongebruikt blijven. De derde laag kan weer hoogstens 8 kubusjes bevatten. We komen zo uit op de derde boven beschreven oplossing.
- Er is geen laag met 8 kubusjes, maar wel een laag met 7 kubusjes.
Dat kan op symmetrie na op twee manieren:

x		x				x	x	
x		x				x		x
x	x	x				x	x	x

of

x	x							
x		x						
x	x	x						

Om aan 18 kubusjes te komen moet de volgende laag minstens $18 - 7 - 7 = 4$ kubusjes bevatten. Maar vijf van de zeven kubusjes hebben al twee burens, zodat de volgende laag alleen op de volgende plekken nog kubusjes kan (en dus moet) hebben:

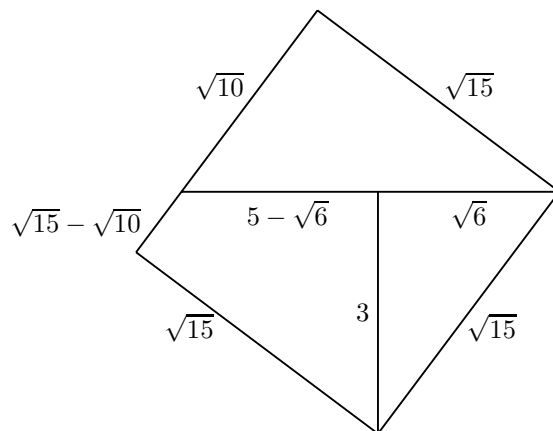
x	x	x					x	x
	x						x	x

respectievelijk

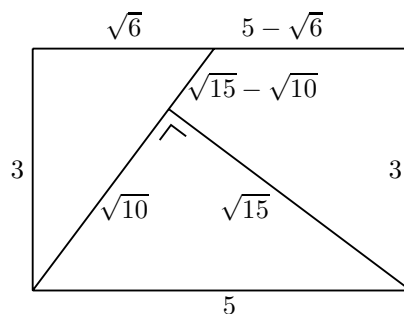
	x	x						
	x	x						

Maar dan zijn er kubusjes met teveel burens. In feite kan de middenlaag maar twee kubusjes bevatten, en dat leidt tot de eerste boven beschreven oplossing.

- Alle drie lagen tellen 6 kubusjes.
Bekijk de middelste laag. Op symmetrie na zijn er zeven manieren om 6 kubusjes reglementair in een laag onder te brengen:



We controleren nog even dat alles inderdaad aan elkaar past in de rechthoek:



12

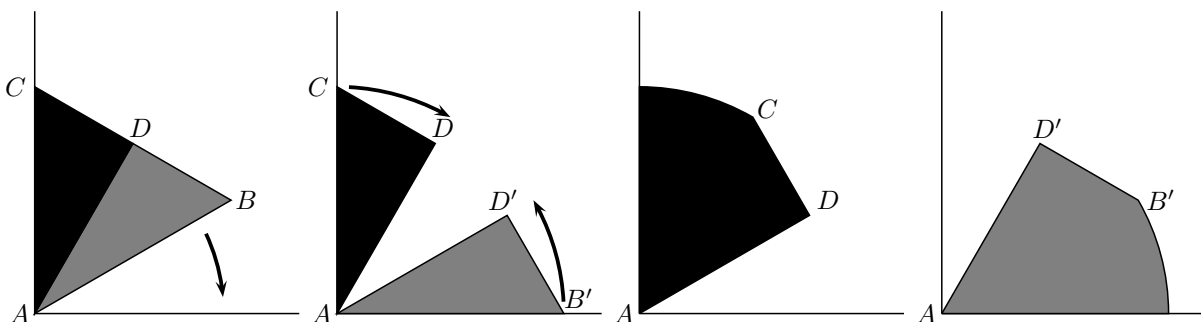
Leg de dobbelsteen zó neer dat het vlak met de 1 naar links wijst. Er zijn $6 - 1 = 5$ mogelijkheden voor het aantal ogen op het vlak dat naar rechts wijst. Draai de dobbelsteen zó dat het overblijvende vlak met het kleinste aantal ogen naar boven wijst. Voor de verdeling van de 3 overblijvende aantallen over de drie overblijvende vlakken zijn er $3 \times 2 \times 1 = 6$ mogelijkheden. Het totaal aantal mogelijkheden is dus $5 \times 6 = 30$.

13

De muis loopt de gevarenzone binnen net nadat een blad van de deur is gepasseerd. Na 4 seconden is de deur $\frac{4}{12} \cdot 360^\circ = 120^\circ$ gedraaid, en verliest dat blad van de deur contact met de route van de muis. Nog eens 3 seconden later is de deur nog een kwartslag gedraaid en verliest het volgende blad dat contact. De muis heeft dus 7 seconden om het gevaarlijke deel van zijn route af te leggen, en de lengte daarvan bedraagt $2\sqrt{3}$ meter. Zijn snelheid moet dus groter zijn dan $\frac{2}{7}\sqrt{3}$ meter per seconde (maar minder dan $\sqrt{3}$, anders stoot hij niet zijn staart maar zijn neus).

14

We delen de gelijkzijdige driehoek ABC in twee delen ABD en ADC , waar D het middelpunt is van BC . Zie de eerste figuur hieronder.



We onderzoeken eerst welke punten bestreken worden door ADC over 30° te wentelen, en vervolgens welke punten bestreken worden door ABD te wentelen. Maar in plaats van ADB over 30° rechtsom te wentelen, kunnen we hem in de eindpositie $AD'B'$ plaatsen en 30° linksom wentelen. Zie de tweede figuur.

De punten die bestreken worden door ADC te wentelen vormen een cirkelsector (gevormd door de punten waar AC overheen komt) tezamen met een driehoek (de eindpositie van ACD). Zie de derde figuur.

De punten die bestreken worden door ADB vormen ook een cirkelsector tezamen met een driehoek. Zie de vierde figuur.

15

Twee van de vier cijfers van 3657 moeten correct zijn, en zijn dus fout in 1282. Dat betekent dat de resterende 2 cijfers van 1282 correct zijn. Dit leidt tot 6 mogelijkheden, afhankelijk van welke 2 cijfers van 3657 correct zijn, namelijk

$$3682, \quad 3252, \quad 3287, \quad 1652, \quad 1687, \quad 1257.$$

Dat van 1687 precies twee cijfers correct zijn betekent dat van deze zes alleen 3682 en 3287 en 1257 overblijven. Dat van 3203 precies twee cijfers correct zijn betekent dat van deze zes alleen 3252 en 3287 overblijven. Alleen 3287 voldoet beide eisen tegelijk.

16

In het volgende verhaal laten we de eenheden weg; alles is in decimeter. Een bol met straal 1 die in een hoek van een doos is gedrukt heeft zijn middelpunt op afstand 1 van elk van de zijvlakken, en dus op afstand $\sqrt{3}$ van het hoekpunt (door twee keer de stelling van Pythagoras toe te passen). Beide middelpunten bevinden zich dus op de lichaamsdiagonaal van de kubus, op afstand r van elkaar, en op afstand $\sqrt{3}$ van de eindpunten van die diagonaal. De lengte van de diagonaal is dus $2 + 2\sqrt{3}$. Maar dit is $\sqrt{3}$ maal de lengte van de ribbe (weer met twee keer Pythagoras).

17

Uit $675 = (a + b)(a - b)$ volgen de volgende mogelijkheden:

$a + b$	$a - b$	a	b
675	1	338	337
225	3	114	111
135	5	70	65
75	9	42	33
45	15	30	15
27	25	26	1

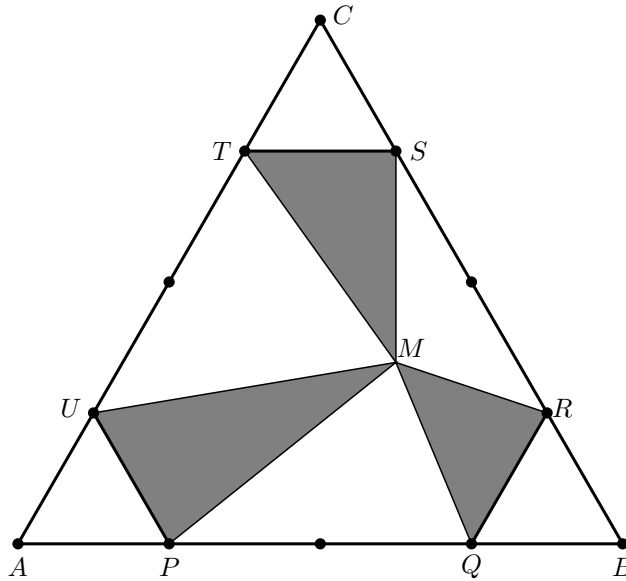
Uit $243 = (a + c)(a - c)$ volgen de volgende mogelijkheden:

$a + c$	$a - c$	a	c
243	1	122	121
81	3	42	39
27	9	18	9

Alleen de mogelijkheid $a = 42$ komt in beide tabellen voor. Dan is $b = 33$ en $c = 39$.

18

We trekken de lange zijden door zodat een gelijkzijdige driehoek ABC ontstaat. We noemen het punt binnen de zeshoek M en geven de namen P, Q, R, S, T, U aan de hoekpunten van de zeshoek:



De oppervlakte van driehoek PMQ is de helft van de oppervlakte van driehoek AMB omdat de lengte van de basis PQ de helft van de lengte van de basis AB bedraagt, maar de hoogte van M boven de basis hetzelfde is. Zo vinden we:

$$\begin{aligned} \text{opp}(PMQ) &= \frac{1}{2} \text{opp}(AMB), \\ \text{opp}(RMS) &= \frac{1}{2} \text{opp}(BMC), \\ \text{opp}(TMU) &= \frac{1}{2} \text{opp}(CMA) \end{aligned}$$

en dus

$$\text{opp}(PMQ) + \text{opp}(RMS) + \text{opp}(TMU) = \frac{1}{2} \text{opp}(ABC)$$

Van de andere kant is

$$\begin{aligned}\text{opp}(APU) &= \frac{1}{16} \text{opp}(ABC), \\ \text{opp}(QBR) &= \frac{1}{16} \text{opp}(ABC), \\ \text{opp}(TSC) &= \frac{1}{16} \text{opp}(ABC)\end{aligned}$$

Dus de oppervlakte van het witte deel van bovenstaande figuur is $\frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$ van de oppervlakte van driehoek ABC , en voor het grijze deel resteert $\frac{5}{16}$ deel. Gegeven is dat dit 100 eenheden bedraagt. De oppervlakte van driehoek ABC bedraagt dus $\frac{16}{5} \cdot 100 = 320$, en de gevraagde oppervlakte is de helft daarvan, dus 160.

19

We verdelen de uitslagen in typen, afhankelijk van welke groepen wielrensters ex aequo eindigen:

- Alle deelnemers finishen afzonderlijk.
Dan zijn er vier mogelijkheden voor de eerste plaats, drie mogelijkheden voor de tweede plaats en twee voor de derde plaats. Daarmee ligt de uitslag van de kopgroep vast: de resterende renster wordt vierde. In totaal zijn er $4 \times 3 \times 2 = 24$ mogelijkheden.
- Alleen de derde en vierde plaats vallen samen.
Dan zijn er vier mogelijkheden voor de eerste plaats en drie voor de tweede, en daarmee ligt de uitslag vast. In totaal zijn er $4 \times 3 = 12$ zulke mogelijkheden.
- Alleen de tweede en derde plaats vallen samen.
Dat geeft op dezelfde manier 12 mogelijkheden.
- Alleen de eerste en tweede plaats vallen samen.
Dat geeft op dezelfde manier 12 mogelijkheden.
- De tweede, derde en vierde plaats vallen samen.
Er zijn vier mogelijkheden voor de eerste plaats, en daarmee ligt de uitslag vast.
- De eerste, tweede en derde plaats vallen samen.
Er zijn vier mogelijkheden voor de vierde plaats, en daarmee ligt de uitslag vast.
- De eerste en tweede plaats vallen samen, en ook de derde en vierde.
Er zijn $(4 \times 3)/2 = 6$ mogelijkheden om uit vier personen een groepje van twee te kiezen.
- De hele kopgroep eindigt tegelijk.

In totaal zijn er dus $24 + 12 + 12 + 12 + 4 + 4 + 6 + 1 = 75$ uitslagen.

20

Schrijf $f(n)$ voor het aantal patronen voor een pad met een lengte van n halve meters. Elk patroon eindigt óf op één dwarse tegel óf op twee tegels in de lengte-richting. In het eerste geval levert weghalen van de ene tegel een patroon voor een pad van $n - 1$ halve meters, in het tweede geval weghalen van de twee tegels een patroon voor een pad van $n - 2$ halve meters. Omgekeerd levert elk patroon voor een pad van lengte $n - 1$ een patroon op voor een pad van lengte n dat eindigt op een dwarse tegel. Ook levert elk patroon voor een pad van lengte $n - 2$ een patroon op voor een pad van lengte n dat eindigt op twee tegels in de lengte-richting. Merk op dat elk patroon zo maar op één manier kan ontstaan. We zien dus dat

$$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2) \quad \text{voor } n \geq 3$$

Aangezien het duidelijk is dat $f(1) = 1$ en $f(2) = 2$ vinden we achtereenvolgens $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 8$, $f(6) = 13$, $f(7) = 21$ en $f(8) = 34$.

Deze rij getallen heet de rij van Fibonacci, naar de bijnaam van Leonardo van Pisa (circa 1170-1250).