

Opgave 1 (20 punten)

2016 is een *driehoeksgetal*: er bestaat een geheel getal n zo dat

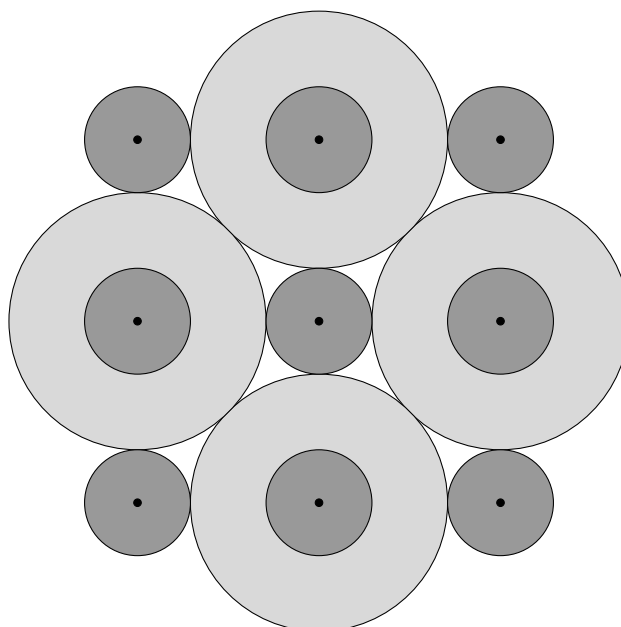
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = 2016$$

Wat is n ?

$$[2016 = 32 \cdot 9 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7]$$

Opgave 2 (20 punten)

Gegeven is een vierkant patroon van 3×3 cirkels met straal 1: de donkere cirkels die hieronder staan aangegeven. De onderlinge afstand tussen twee horizontaal of verticaal naast elkaar gelegen cirkels is telkens hetzelfde.

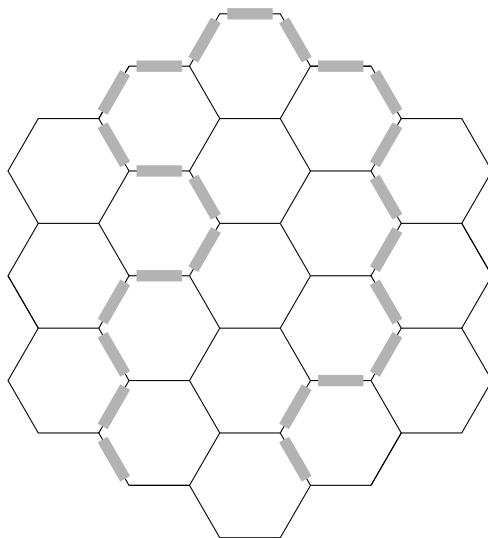


De middelpunten van vier van deze cirkels zijn ook de middelpunten van vier grotere cirkels, zoals hierboven is aangegeven. Deze grotere cirkels raken niet alleen aan de vijf andere cirkels, maar ook diagonaalsgewijs aan elkaar.

Wat is de straal van de grotere cirkels?

Opgave 3 (30 punten)

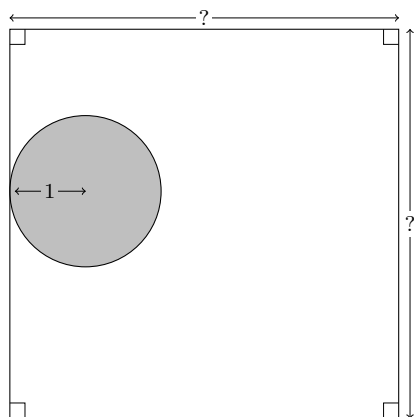
We zoeken naar de langste handelsroute die je kunt maken bij Kolonisten van Catan. In onderstaand ‘speelbord’ zijn op 24 lijnstukjes grijze ‘wegen’ gelegd, en wel zo, dat alle wegen met elkaar verbonden zijn, en er nergens drie wegen bij elkaar komen.



Hoeveel wegen kun je maximaal leggen zodat aan deze voorwaarden voldaan wordt?

Opgave 4 (20 punten)

Een cirkel met straal 1 meter rolt op de binnenrand van een vierkant. Na twee omwentelingen (720° om zijn eigen middelpunt) bereikt de cirkel voor het eerst weer zijn startpositie.



Hoeveel meter is de zijde van het vierkant?

Opgave 5 (30 punten)

We noemen een jaar/jaartal van vier cijfers, zeg $abcd$, *speciaal* als

$$ab + cd \quad \text{en} \quad ab - cd$$

beide kwadraten zijn. Aangezien

$$20 + 16 = 6^2 \quad \text{en} \quad 20 - 16 = 2^2$$

is het jaar 2016 speciaal. Andere speciale jaren zijn

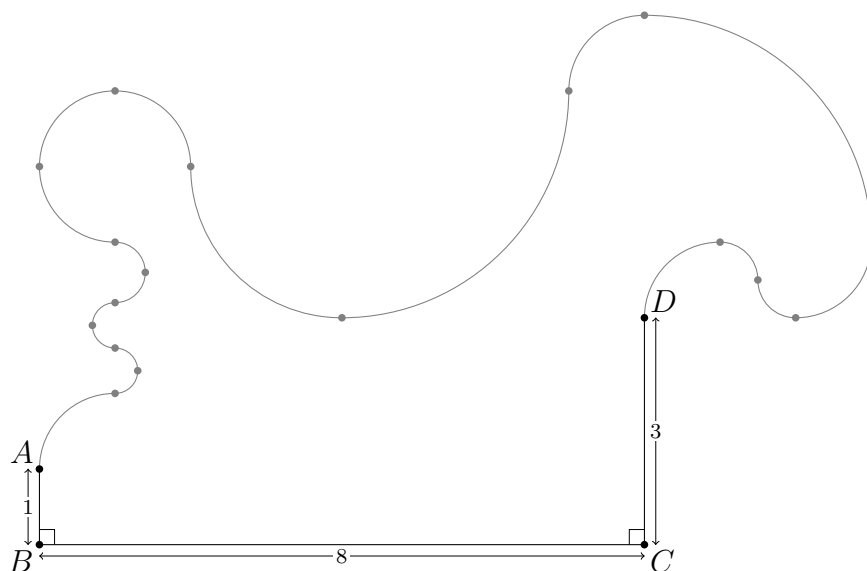
$$1600 \quad 2610 \quad \text{en} \quad 3232$$

Wat was het laatste speciale jaar voor 2016?

Opgave 6 (20 punten)

Een *kwartcirkel-weg* is een keten van kwartcirkels, die zonder knik aan elkaar hangen.

Laat A , B , C , D vier punten van het vlak zijn, met $|AB| = 1$, $|BC| = 8$ en $|CD| = 3$. Neem verder aan dat hoek ABC en hoek BCD 90° zijn, en dat A en D aan dezelfde kant van de lijn BC liggen.



Hoe lang is de kortste kwartcirkel-weg, die bij A lijnstuk BA zonder knik voortzet en bij D zonder knik in lijnstuk DC uitmondt?

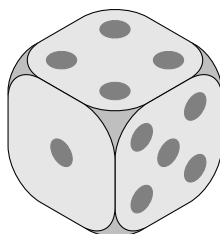
Opgave 7 (20 punten)

a is een (reëel) getal tussen 10 en 11. Verder is gegeven dat de decimaalontwikkeling na de komma van a hetzelfde is als die van $1/a$.

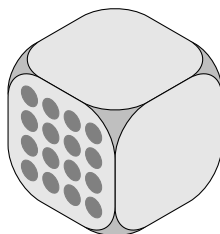
Wat is a ?

Opgave 8 (20 punten)

Een gewone dobbelsteen heeft, voor $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, precies één zijde met precies k ogen, en geen andere zijden.



We maken nu een speciale dobbelsteen met zes zijden en 0 of meer ogen op elke zijde. Bij deze speciale dobbelsteen mogen verschillende zijden hetzelfde aantal ogen hebben. Hieronder zijn drie zijden van een mogelijke speciale dobbelsteen getekend.

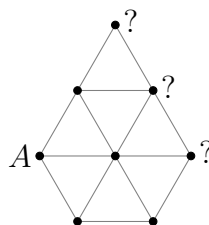


Gegeven is dat de speciale dobbelsteen in totaal evenveel ogen heeft als een gewone dobbelsteen, en dat het volgende geldt: als we de speciale dobbelsteen samen met een gewone dobbelsteen gooien, kan het totaal aantal ogen dat we gooien $1, 2, 3, \dots, n$ zijn, maar niet $n + 1$.

Wat is n maximaal?

Opgave 9 (30 punten)

De letters A tot en met H staan bij de acht punten in onderstaande figuur, die is opgebouwd uit gelijkzijdige driehoeken. De positie van A is al gegeven.



Daarnaast geldt het volgende voor de afstanden tussen de punten.

$$|GH| < |AB| = |AC| = |BC| < |AF| < |BE|$$

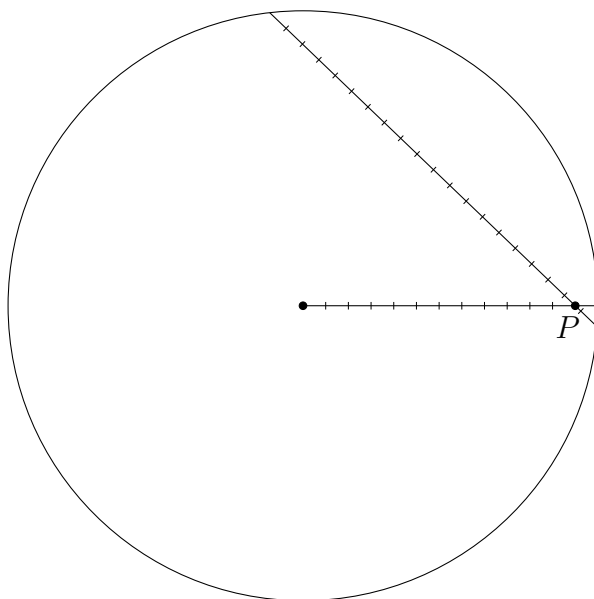
Hierbij is $|pq|$ de lengte van lijnstuk pq .

Wat zijn, van boven naar beneden, de punten waar een vraagteken bij staat in bovenstaande figuur?

Opgave 10 (20 punten)

Een *koorde* van een cirkel is een lijnstuk waarvan beide eindpunten op de cirkel liggen.

In een cirkel met straal 13 ligt een punt P op afstand 12 van het middelpunt.



Hoeveel koorden door P hebben een lengte die een geheel getal is?

Opgave 11 (30 punten)

Gegeven is dat x en y gehele getallen zijn, zo dat $x > y > 0$ en

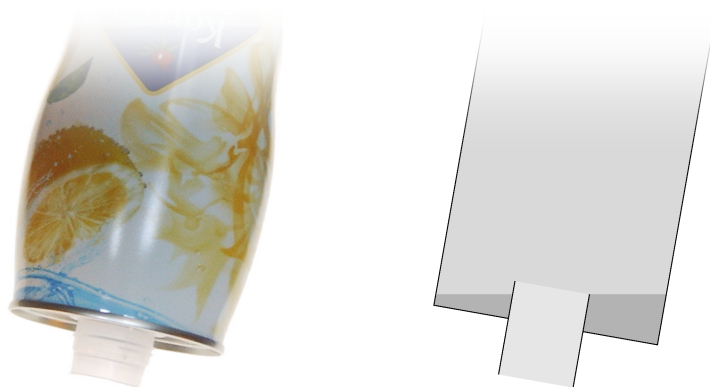
$$x^3 y - x y^3 = 2016$$

Wat zijn x en y ?

$$[2016 = 32 \cdot 9 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7]$$

Opgave 12 (20 punten)

Klaas wilt een glas aanmaaklimonade (limonadesiroop aangelengd met water) drinken. Hij pakt een glas, maar helaas heeft zijn zusje net het blik met limonadesiroop helemaal uit laten druppen in haar glas. Het blik heeft echter de eigenschap, dat er altijd 25 milliliter in achterblijft.



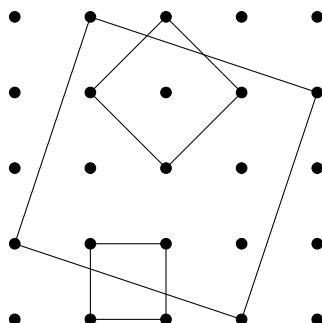
Er zit dus 25 milliliter siroop in het blik. Klaas vult het blik bij met wat kraanwater, schudt het blik zodat de inhoud een egaal mengsel wordt en giet het blik uit in het glas. Daarna doet hij dat nog een keer, mogelijk met een andere hoeveelheid kraanwater. Beide keren blijft er 25 milliliter vloeistof in het blik achter.

Klaas heeft vervolgens 200 milliliter aanmaaklimonade in zijn glas.

*Wat is de grootste mogelijke hoeveelheid **siroop** in Klaas' glas?*

Opgave 13 (20 punten)

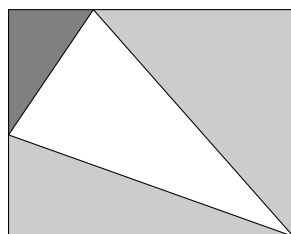
25 stippen liggen volgens een vierkant rooster van 5 bij 5, zie hieronder.



Hoeveel vierkanten zijn er waarvan alle hoekpunten in die stippen liggen?

Opgave 14 (30 punten)

Een gelijkbenige driehoek, waarvan de benen tweemaal zo lang zijn als de basis, wordt met een rechthoek omrand. De top van de driehoek ligt op een hoek van de rechthoek. De andere twee hoekpunten van de driehoek liggen op de tegenoverliggende zijden van de rechthoek.



De rechthoek zonder de gelijkbenige driehoek bestaat uit drie rechthoekige driehoeken. De oppervlakte van de rechthoekige driehoek die aan de basis van de gelijkbenige driehoek grenst (de donkergrijze driehoek) is gelijk aan 1.

Hoe groot is de oppervlakte van de andere twee rechthoekige driehoeken (de lichtgrijze driehoeken) tezamen?

Opgave 15 (30 punten)

Op een kantoor werken zes mensen: A , B , C , D , E en F . Ze hebben verschillende werktijden, namelijk

12–2,
12–1 en 2–3,
1–2,
2–5,
3–6,
5–6.

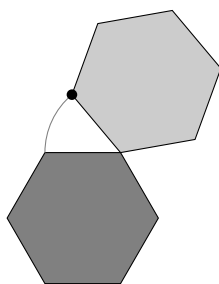
Verder geldt het volgende.

- I A werkt langer dan B ; B werkt langer dan C .
- II Op elk moment tussen 12 en 6 uur is minstens een van de personen B , C en D aanwezig.
- III D en E zien elkaar wanneer de een weggaat en de ander aankomt, en anders niet.

Wie werken er op de aangegeven tijden? Geef de letters A tot en met F in de volgorde van bovenstaand rijtje werktijden.



Opgave 16 (30 punten)

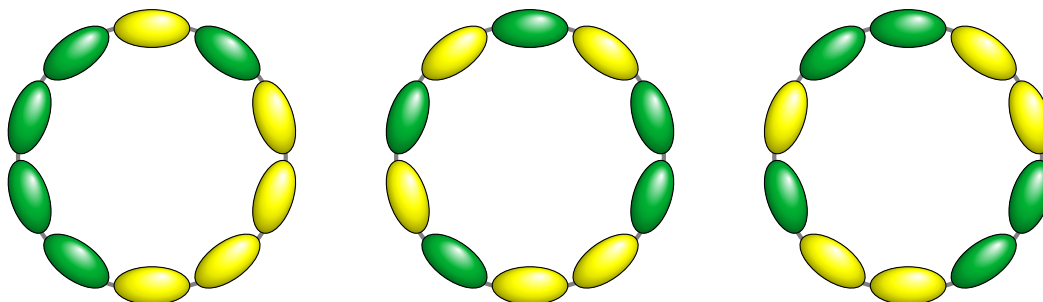
We rollen een regelmatige zeshoek met zijde 1 over een andere regelmatige zeshoek met zijde 1. We kiezen een hoek van de rollende zeshoek en beschouwen de kromme, die deze hoek tijdens het rollen doorloopt. De kromme sluit zich, nadat de rollende zeshoek eenmaal in zijn geheel is afgerold op de vaste zeshoek.



Hoe groot is de oppervlakte van de figuur, die door de kromme ingesloten wordt?

Opgave 17 (30 punten)

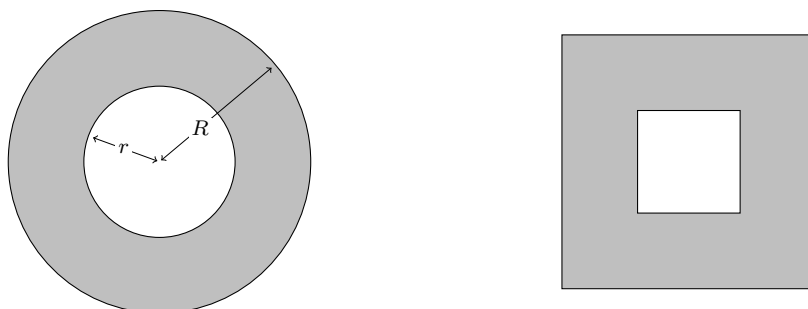
We maken een armband van 10 kralen, in de kleuren geel  en groen . Door de armband te draaien of om te keren, kunnen we de kralen van de armband verwisselen, maar we spreken af dat de armband dan nog steeds hetzelfde is.



Hoeveel kleurcombinaties zijn er mogelijk met 5 groene kralen en 5 gele kralen?

Opgave 18 (20 punten)

Gegeven is een cirkelvormige ring, die wordt ingesloten door twee concentrische cirkels, en een vierkante ring, die wordt ingesloten door twee concentrische vierkanten. Beide ringen hebben dezelfde oppervlakte (grijs weergegeven in de figuur) en dezelfde omtrek (som van de omtrek van de binnenste en de buitenste rand).



De kleinste cirkel van de cirkelvormige ring heeft straal r en de grootste cirkel van de cirkelvormige ring heeft straal R . Verder is bekend dat

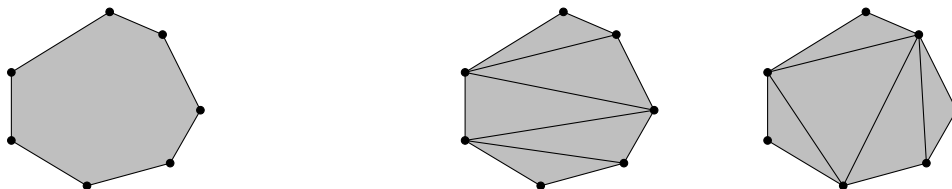
$$R + r = 1600$$

Wat is nu de grootste mogelijke geheeltallige waarde van R ?

$[\pi = 3,14159 \dots]$

Opgave 19 (30 punten)

De zevenhoek linksonder kunnen we in 5 driehoeken verdelen door middel van 4 diagonalen die elkaar niet snijden, zie bijvoorbeeld de twee zevenhoeken rechtsonder.



Op hoeveel manieren kunnen we de zevenhoek zo opdelen in 5 driehoeken?

Opgave 20 (30 punten)

Het getal $\frac{1}{6}$ kan men op meerdere manieren schrijven als de som van twee verschillende stambreuken (breuken met teller 1 en positieve noemer), bijvoorbeeld op de volgende twee manieren:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{42} + \frac{1}{7} \quad \text{en} \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$$

Op hoeveel manieren kan het getal $\frac{1}{2016}$ geschreven worden als de som van twee verschillende stambreuken?

$$[2016 = 32 \cdot 9 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7]$$