
WISKUNDE-ESTAFETTE KUN 2001

Uitwerkingen

1

Stel de afstand is d km. Dan is

$$\frac{d}{20} + 1 = \frac{d}{10} - 1,$$

dus $d = 40$.

2

Om 8 uur staat de grote wijzer 240° achter de kleine. Per minuut legt de grote wijzer $\left(\frac{360}{60}\right)^\circ (=6^\circ)$ af; de kleine legt per 12 uren 360° af, dus per uur 30° en dus per minuut $\frac{1}{2}^\circ$. De grote loopt dus per minuut $5\frac{1}{2}^\circ$ in op de kleine. De achterstand is dus na 40 minuten teruggebracht tot 20° . Het is dan 8.40 uur.

3

Met x munten van $\frac{1}{2}$, y munten van 1 en z munten van 5 escovedo hebben we in totaal

$x + y + x$ munten, een bedrag van

$\frac{1}{2}x + y + 5z$ ($=2001$) escovedo en een gewicht van

$\frac{4}{5}x + y + 2z$ ($=2001$) gram.

De gegeven relaties $\frac{1}{2}x + y + 5z = 2001$ en $\frac{4}{5}x + y + 2z = 2001$ (x, y, z niet-negatieven, gehele getallen) tezamen zijn gelijkwaardig met $x = 10z$ en $y + 10z = 2001$ tezamen. Het totaal aantal muntstukken is $x + y + z$, dus $y + 11z$, dus $2001 + z$.

We willen $2001 + z$, en dus z zo groot mogelijk maken, terwijl geldt $y + 10z = 2001$ (y en z niet-negatief geheel). Dan moeten we voor z natuurlijk 200 nemen (en voor y : 1). Dan: $x = 2000$, $y = 1$ en $z = 200$. Het gevraagde aantal is dus 2201.

4

Het aantal volwassen mannen in die stad noemen we m , het aantal volwassen vrouwen noemen we v . Dan is

$$\frac{2}{3}m = \frac{3}{4}v$$

(d.w.z. $m = \frac{9}{8}v$). Er zijn $2 \cdot \frac{3}{4}v$ volwassenen getrouwd; het aantal volwassenen is $v + \frac{9}{8}v$. Het deel van de volwassenen dat is getrouwd, is dus

$$\frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 + \frac{9}{8}} \quad \left(= \frac{12}{17}\right).$$

5

Voor ieder natuurlijk getal n geldt: n en n^5 hebben hetzelfde laatste cijfer. Omdat $9^5 = 81 \cdot 81 \cdot 9 > 80 \cdot 80 \cdot 9 = 57600$ (d.w.z. $90^5 > 5760000000$) en $8^5 = 2^5 \cdot 2^{10} = 32 \cdot 1024 = 32768$ (d.w.z. $80^5 = 3276800000$), terwijl $n^5 = 34867844001$ (volgens het gegeven), is n een getal een getal tussen 80 en 90. n kan dus alleen maar gelijk zijn aan 81.

6

We geven de inhoud van de flessen in de begintoestand als volgt aan:

$A: 0$	$B: 1$	$C: 0$	$D: 1$
--------	--------	--------	--------

Na één operatie:

$A: \frac{1}{2}$	$B: \frac{1}{2}$	$C: 0$	$D: 1$
------------------	------------------	--------	--------

Na de tweede operatie:

$A: \frac{1}{2}$	$B: \frac{1}{4}$	$C: \frac{1}{4}$	$D: 1$
------------------	------------------	------------------	--------

Na de derde:

$A: \frac{1}{2}$	$B: \frac{1}{4}$	$C: \frac{5}{8}$	$D: \frac{5}{8}$
------------------	------------------	------------------	------------------

Na de laatste:

$A: \frac{9}{16}$	$B: \frac{1}{4}$	$C: \frac{5}{8}$	$D: \frac{9}{16}$
-------------------	------------------	------------------	-------------------

C bevat dus de meeste alcohol.

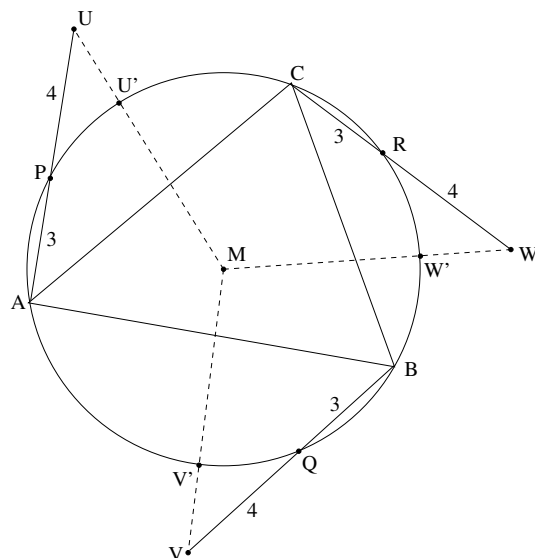
7

Noem het middelpunt van de cirkel: M . Omdat $\angle BAC$ 50° groot is, is $\angle BMC$ 100° groot. Omdat de lijnstukken BQ en CR even lang zijn, zijn ook de hoeken QMB en $RM C$ even groot, en dus is ook $\angle QMR$ 100° groot.

Als we de figuur $MBQV$ om M linksom over 100° draaien krijgen we figuur $MCRW$. V en W liggen dus even ver van M en $\angle VMW$ is 100° groot.

Net zo: W en U liggen even ver van M , terwijl $\angle WMU$ even groot is als $\angle CMA$ (nl. tweemaal zo groot als $\angle CBA$). (En ook: U en V liggen even ver van M , terwijl $\angle UMV$ 140° groot is.) U , V en W liggen dus op een cirkel die (ook) M als middelpunt heeft. En dus: $\angle VUW$ is half zo groot als $\angle VMW$, en dus 50° groot. Bovendien $\angle WVU$ is 60° groot en $\angle UWV$ is 70° groot.

Tweede oplossing.



De lijnstukken MU , MV , MW snijden de cirkel in U' , V' , W' .

De figuren $MAPUU'$, $MBQVV'$, $MCRWW'$ zijn congruent. Dus $\angle AMU'$, $\angle BMV'$, $\angle CMW'$ zijn even groot en MU , MV , MW zijn even lang.

Dus $\triangle UVW$ is gelijkvormig met $\triangle U'V'W'$ die congruent is met $\triangle ABC$ (als je ABC om M over $\angle AMU'$ draait, krijg je $\triangle U'V'W'$). Dus $\angle U$, $\angle V$, $\angle W$ zijn groot 50° , 60° , 70°

8

Opsplitsingen liggen vast door één van beide zestallen aan te geven. Er zijn $\binom{12}{6}$ ($=924$) groepjes van zes.

Hiervan vallen diegenen af waarbij in een zestal slechts één jongen zit en ook die waarbij in een zestal zes jongens zitten. Dat zijn er $\binom{7}{1}$ ($=7$) respectievelijk $\binom{7}{6}$ ($=7$).

Er zijn daarom 910 groepjes van zes, dus $455 (= \frac{1}{2} \cdot 910)$ opsplitsingen

9

Omdat Smit tweemaal zoveel geld heeft gekregen als Pietersen is de som van de bedragen die zij gekregen hebben, deelbaar door 3. Het totale bedrag, 225, is dat ook. Blijkbaar is het bedrag van Jansen ook een drievoud. Jansen heeft dus 75 geïnd.

10

Merk op dat

$$72\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{36} + \frac{1}{72}\right) = \\ 72 + 36 + \cdots + 2 + 1 = 195$$

De gevraagde som is dus $\frac{195}{72} (= \frac{65}{24})$.

11

We geven de leeftijden van N, S, W, A, B, C achtereenvolgens aan met n, s, w, a, b, c . We beschikken over de volgende gegevens:

1 $w \in \{33, 40\}$

2 $a + c$ is oneven

3 $w + c$ is oneven

4 $b \cdot c$ is even

5 $s + a < w + b$

Veronderstel even: $w = 40$; uit **3** volgt dan: c is oneven, maar dan volgt uit **2** dat a even is en uit **4** dat b even is, en dan zouden A en B beiden 40 jaar oud zijn. Conclusie: $w = 33$ (**6**)

Nu volgt uit **3** dat c even is, dus $c = 40$ (**7**).

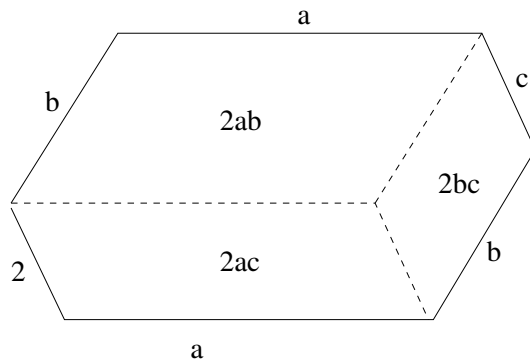
Uit **6** en **7** concluderen we: $\{s, n\} = \{31, 40\}$ en $\{a, b\} = \{31, 33\}$. Neem nu **5** erbij: $s + a < w + b (= 33 + 40)$.

We zien meteen: $s \neq 40$! En dus $s = 31$ en $n = 40$, terwijl $\{a, b\} = \{31, 33\}$ en $31 + a < 33 + b$. En uit dat laatste volgt $a = 31$ $b = 33$. We zijn klaar!

	Natuurkundeleraar	Scheikundeleraar	Wiskundeleraar
naam	C	A	B
leeftijd	40	31	33

12

We verdelen de zeshoek in drie parallellogrammen



Die bevatten $2ab$, $2ac$ respectievelijk $2bc$ eenheidsdriehoekjes.

De gegeven zeshoek bevat dus $2(ab + ac + bc)$ eenheidsdriehoekjes.

13

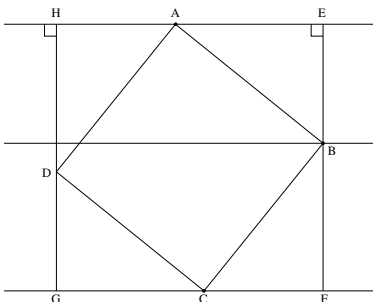
De oppervlakte van de zwarte stukken bij elkaar is $\frac{1}{3}$ van de oppervlakte van de grote driehoek.

De grootste van de zwarte driehoekjes heeft half zo lange zijden als de driehoek. Zijn oppervlakte is dus $\frac{1}{4}$ deel van de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek.

De op een na grootste zwarte driehoek heeft oppervlakte $\frac{1}{4^2}$ deel van de oppervlakte van de oorspronkelijke driehoek, enzovoorts.

We zien zo dat $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{3}$.

14



$EFGH$ is een vierkant van 12 bij 12. De driehoeken ABE , BCF , CDG en DAH hebben elk oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \text{ cm}^2$

De oppervlakte van vlakstuk $ABCD$ is dus 74 cm^2

15

Noem die som S . We hebben

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{99}{100}\right)$$

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{99}{100} + \frac{98}{100} + \frac{97}{100} + \cdots + \frac{1}{100}\right)$$

dus door optellen krijgen we

$$2S = 1 + (1 + 1) + (1 + 1 + 1) + \cdots + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1)$$

d.w.z.

$$\begin{array}{rcccccccc} 2S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 99 \\ 2S & = & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \cdots & + & 1 \\ 4S & = & 100 & + & 100 & + & 100 & + & \cdots & + & 100 \end{array} \quad (=9900).$$

Blijkbaar is $S = 2475$.

16

$$\begin{array}{ll} 2^4 & \text{eindigt met } 16 \\ 2^8 & \text{eindigt dus net als } 16^2 \text{ met } 56 \\ 2^{16} & \text{eindigt dus net als } 56^2 \text{ met } 36 \\ 2^{32} & \text{eindigt dus net als } 36^2 \text{ met } 96 \\ 2^{64} & \text{eindigt dus net als } 96^2 \text{ met } 16 \end{array}$$

$2^{64} - 1$ eindigt dus met 15.

17

We willen dat $n^2 - n$ deelbaar is door 1000 dus dat $n(n-1)$ deelbaar is door $2^3 \cdot 5^3$. Omdat $n < 999$ zijn noch n , noch $n-1$ deelbaar door 1000. We hebben dus twee mogelijkheden:

- n is deelbaar door 8 en $n-1$ is deelbaar door 125;
- n is deelbaar door 125 en $n-1$ is deelbaar door 8;

Dit leidt tot twee oplossingen: 376 en 625.

18

$$c d e f a b = (a b c d e f - ab \cdot 10^4) \cdot 10^2 + ab.$$

We willen dat $100 \cdot a b c d e f - (10^6 - 1)ab = 2 \cdot a b c d e f$, ofwel

$$98 \cdot a b c d e f = 999999 \cdot ab$$

Deel beide zijden door 7:

$$14 \cdot a b c d e f = 142857 \cdot ab$$

Omdat 142857 en 14 geen factoren gemeen hebben is ab een veelvoud van 14, d.w.z.

$$ab \in \{14, 23, 42, 56, 70, 84, 98\}.$$

Onderzoek van deze zeven gevallen levert de oplossingen

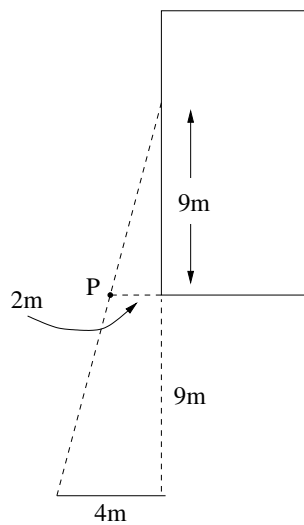
$$142857 \quad 285714 \quad 428571$$

19

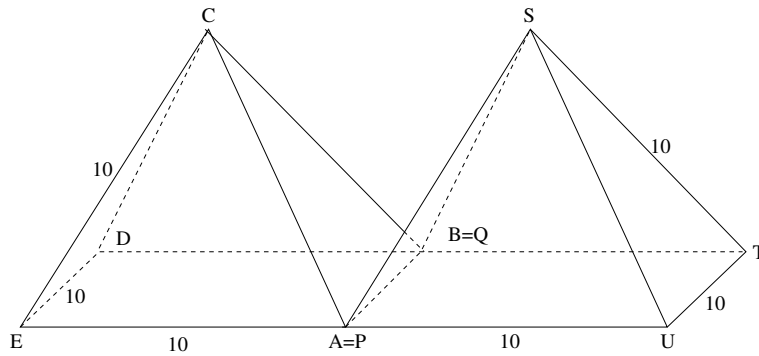
Het verlichte deel van de zijgevel is een rechthoekige driehoek met een oppervlakte van $13,5 \text{ m}^2$ en een rechthoekszijde van 3 m. De andere rechthoekszijde is dus 9 m.

De hoogte van het schuine afdak boven punt P is $2\frac{1}{3} \text{ m}$.

De hoogte van de lantaarn is dus $4\frac{2}{3} \text{ m}$ ($= 2 \cdot 2\frac{1}{3} \text{ m}$).



20



Bekijk eens twee copieën van de piramide $ABDE$ met grondvlak in het zelfde vlak en een ribbe gemeenschappelijk.

$PQTU$ is de copie. M is het midden van de zijde QT , $ABSC$ is een regelmatig viervlak. DS is dus de gevraagde afstand. De lengte van DM is 15 cm, en van SM $5\sqrt{3}$ cm. DMS is een rechte hoek. We hebben dus (met Pythagoras) dat $DS^2 = DM^2 + MS^2 = 300$. Dus $DS = 10\sqrt{3}$ cm.