
WISKUNDE-ESTAFETTE 2015

Uitwerkingen

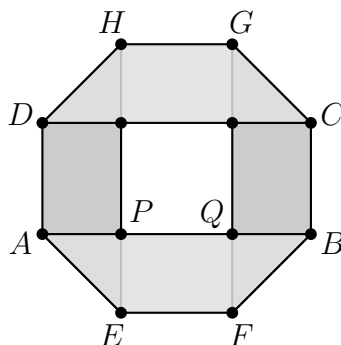
1 (20 punten)

Omdat de som van a en c deelbaar is door 4 en kleiner is dan 12, is deze som 4 of 8. Daarom zijn a en c ofwel de getallen 1 en 3 ofwel de getallen 3 en 5. Een van de getallen a en c is dus 3.

Omdat de som van b en c deelbaar is door 3 en $b \neq c$, is c ongelijk aan 3. Dus moet a wel 3 zijn.

2 (20 punten)

Na het platdrukken vormen de randen van de papieren strook rechthoeken. Noem die rechthoeken $ABCD$ en $EFGH$, zoals hieronder staat aangegeven. Noem de snijpunten van AB met EH en FG respectievelijk P en Q .



Omdat AB loodrecht op EH staat, zijn de lengtes van lijnstuk AP en EP gelijk aan de breedte van de papieren ring, dus 1. AEP is een driehoek met een rechte hoek te P , dus de lengte van lijnstuk AE is $\sqrt{2}$. Dit is tevens de lengte van elke andere zijde van de achthoek. Omdat $EFQP$ een rechthoek is, heeft lijnstuk PQ ook lengte $\sqrt{2}$.

De omtrek van rechthoek $ABCD$ is tweemaal de lengte van lijnstuk AB plus tweemaal de lengte van lijnstuk BC . Dit is gelijk aan

$$2(1 + \sqrt{2} + 1) + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 4$$

en dat is ook de lengte van de papieren ring.

3 (30 punten)

Noem de afstand tussen het huis van Hilde en Willem en punt P x . De tijd in minuten die Hilde nodig heeft voor de reis naar het café is

$$\frac{60}{20}x + \frac{60}{10}(4 - x) = 3x + 6(4 - x) = -3x + 24$$

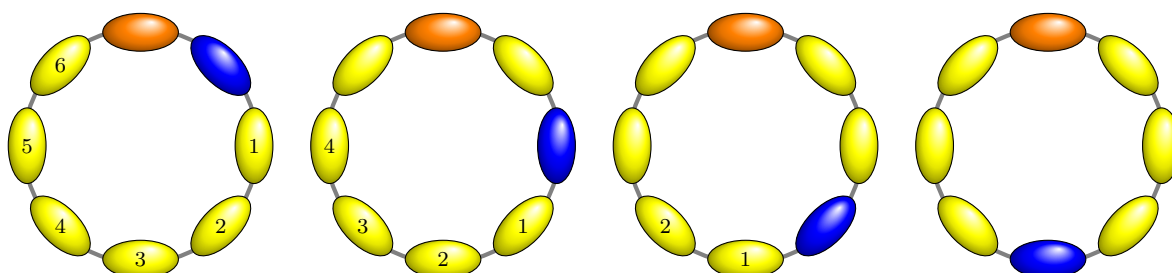
De tijd in minuten die Willem nodig heeft voor de reis naar het café is

$$\frac{60}{5}x + \frac{60}{20}(4 - x) = 12x + 3(4 - x) = 9x + 12$$

Dus moet gelden dat $-3x + 24 = 9x + 12$, oftewel $12 = 12x$. Dus $x = 1$ en $-3x + 24 = 21 = 9x + 12$ is het antwoord.

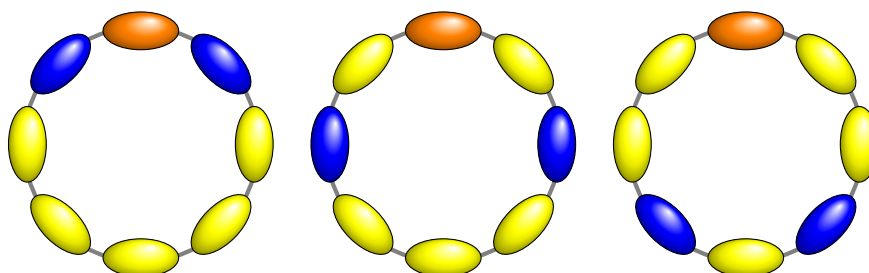
4 (20 punten)

In de ring linksonder kunnen we een genummerde gele kraal door een blauwe vervangen. Zo kunnen we alle combinaties met 1 oranje, 2 blauwe en 5 gele kralen maken, waarbij er nul gele kralen zitten tussen de oranje en de dichtsbijzijnde blauwe kraal.

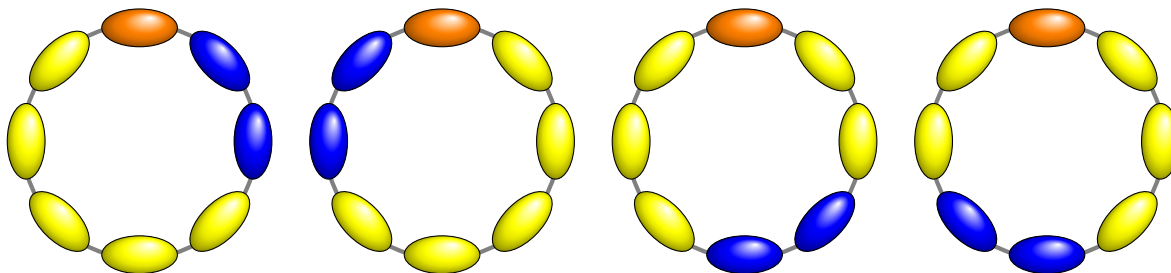


Op dezelfde manier kunnen we alle combinaties met 1 oranje, 2 blauwe en 5 gele kralen maken, waarbij er een of meer gele kralen zitten tussen de oranje en de dichtsbijzijnde blauwe kraal, zie de andere genummerde gele kralen. Het totaal aantal combinaties is dus $6 + 4 + 2 + 0 = 12$.

Meer algemeen geldt het volgende voor het aantal armbanden met precies een oranje kraal. Definieer r als het aantal rijtjes en s als het aantal *symmetrische* rijtjes, dat te maken is met de overige kralen. Dan is het aantal armbanden met precies een oranje kraal gelijk aan $\frac{1}{2}(r + s)$. In dit geval is $r = 21$ en $s = 3$, en inderdaad is $12 = \frac{1}{2}(21 + 3)$. De 3 symmetrische rijtjes corresponderen met de 3 symmetrische armbanden, die hieronder staan weergegeven.



Met niet-symmetrische armbanden corresponderen 2 rijtjes die elkaars spiegelbeeld zijn. Onder de 4 armbanden hieronder zijn slechts twee verschillende armbanden.



5 (30 punten)

Bekijk de puzzel van Pietje zo, dat zijn breedte b minstens even groot is als zijn hoogte h . Op de boven- en onderrand samen liggen $2b$ stukjes. Op de linker- en rechterrand samen liggen $2h$ stukjes. De 4 hoeken liggen op beide, dus het totaal aantal randstukjes is $2b + 2h - 4$.

Omdat het totaal aantal puzzelstukjes bh is, moet dus gelden dat

$$2b + 2h - 4 = \frac{1}{2}bh$$

Dit komt op hetzelfde neer als

$$0 = bh - 4b - 4h + 8$$

oftewel

$$(b - 4)(h - 4) = bh - 4b - 4h + 16 = 8$$

Omdat $b - 4 \geq h - 4$ en $h - 4 > -4$, volgt hieruit dat $h - 4 = 1$ of $h - 4 = 2$.

- Als $h - 4 = 1$, dan is $b - 4 = 8$, dus $bh = 12 \times 5 = 60$.
- Als $h - 4 = 2$, dan is $b - 4 = 4$, dus $bh = 8 \times 6 = 48$.

Het aantal puzzelstukjes van de puzzel van Pietje is daarom 60 of 48 en het aantal puzzelstukjes van de puzzel van Marietje is dus respectievelijk 48 of 60. Het antwoord is dus $60 + 48 = 108$.

De vergelijking $(b - 4)(h - 4) = 8$ kan als volgt opgevat worden. Als we van een rechthoek van $b \times h$ vierkantjes de rand weghalen, dan halen we $2b + 2h - 4$ vierkantjes weg en houden we een rechthoek van $(b - 2) \times (h - 2)$ vierkantjes over.

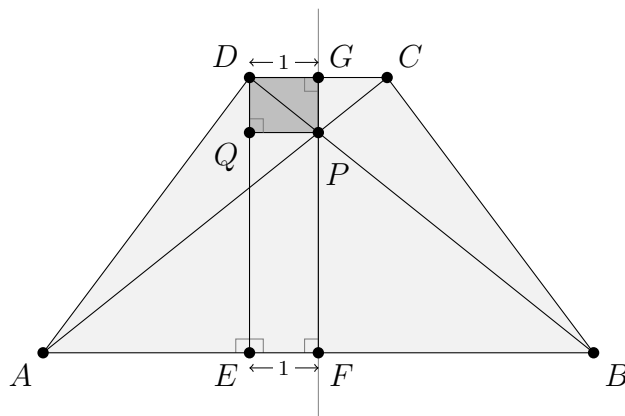
Halen we daarvan opnieuw een rand weg, dan halen we $2(b - 2) + 2(h - 2) - 4 = 2b + 2h - 12$ vierkantjes weg en houden we een rechthoek van $(b - 4) \times (h - 4)$ vierkantjes over. Het aantal vierkantjes van die laatste rechthoek moet gelijk zijn aan het verschil in vierkantjes tussen beide randen, dus

$$(b - 4)(h - 4) = (2b + 2h - 4) - (2b + 2h - 12) = 8$$

6 (20 punten)

Vierhoek $ABCD$ is niet zomaar een trapezium, maar een symmetrisch trapezium. De symmetrie-as is de middelloodlijn van zowel zijde AB als zijde CD .

Noem de middens van zijden AB en CD respectievelijk F en G . Er bestaat een punt E op zijde AB zodanig dat vierhoek $DEFG$ een rechthoek is. Net zo bestaat er een punt Q op lijnstuk DE zodanig dat $DQPG$ een rechthoek is. Rechthoek $DQPG$ hebben we hieronder (donker)grijs gekleurd.



De oppervlakte van rechthoek $DQPG$ in bovenstaande figuur is het dubbele van de oppervlakte van driehoek PGD . De oppervlakte van driehoek CDP is ook het dubbele van de oppervlakte van driehoek PGD , dus het antwoord is gelijk aan de oppervlakte van rechthoek $DQPG$ in bovenstaande figuur.

Schrijf $|\cdot\cdot|$ voor de afstand tussen twee punten. Dan is $|DG| = \frac{1}{2}|DC| = 1$ en

$$|EB| = |EF| + |FB| = |DG| + \frac{1}{2}|AB| = 1 + 4 = 5$$

Dus $|AE| = |AB| - |EB| = 8 - 5 = 3$. Omdat hoek AED 90 graden is, geldt

$$|DE| = \sqrt{|AD|^2 - |AE|^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Omdat DG parallel is met EB , is driehoek PGD gelijkvormig met driehoek DEB . Daarom is

$$|PG| = \frac{|DG|}{|EB|} \cdot |DE| = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$$

De oppervlakte van rechthoek $DQPG$ in bovenstaande figuur is dus $|DG| \cdot |PG| = 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$.

7 (30 punten)

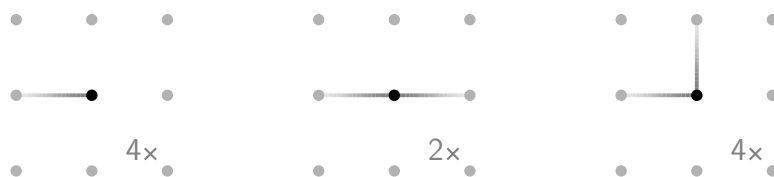
Noem de twee getallen d en k , en kies d zo dat d een veelvoud van 13 is. Dan is d geen kwadraat, want het kleinste veelvoud van 13 dat ook een kwadraat is, is $13 \times 13 = 169$. Dus k is een kwadraat.

Als de som van de cijfers van d gelijk aan 7 is, is $d = 52$. Als de som van de cijfers van k gelijk aan 7 is, is $k = 16$ of $k = 25$. De rest bij deling door 9 van 16, 25 en 52 is ook 7 (en dat is niet geheel toevallig). Omdat $d + k$ deelbaar is door 9, vormen 7 en 2 de resten bij deling door 9 van k en d , in willekeurige volgorde.

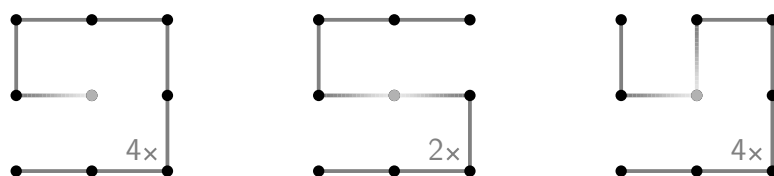
De rest bij deling door 9 is voor geen enkel kwadraat van twee cijfers gelijk aan 2 (de som van de cijfers moet dan 2 of 11 zijn). (Overigens kan de rest bij deling door 9 van welk kwadraat dan ook alleen maar 0, 1, 4 of 7 zijn.) Dus de rest bij deling door 9 van d is gelijk aan 2. Hieruit volgt dat $d = 65$. Verder is k ofwel 16 ofwel 25. Het antwoord is dus 65.

8 (20 punten)

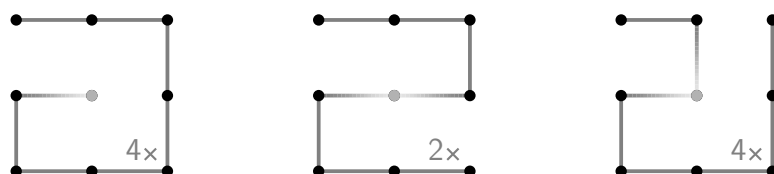
De verbindende lijnstukken bij het middelste punt kunnen we op 10 manieren kiezen: 4 manieren met slechts een lijnstuk, 2 manieren met twee tegenover elkaar liggende lijnstukken en 4 manieren met twee haaks staande lijnstukken.



Vervolgens kunnen we het pad afmaken op 2 manieren: met de klok mee



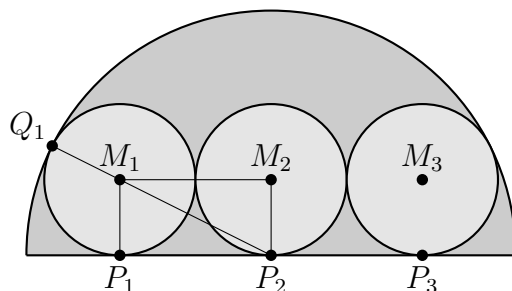
of tegen de klok in.



Het antwoord is dus $2 \times 10 = 20$.

9 (30 punten)

Noem de middelpunten van de kleine cirkels M_1 , M_2 en M_3 , en noem de raakpunten van de kleine cirkels met de rechte zijde van de grote halve cirkelschijf P_1 , P_2 en P_3 , zoals hieronder is aangegeven.



P_2 is het midden van de rechte zijde van de grote halve cirkelschijf en dus het middelpunt van de grote halve cirkel. Het raakpunt van twee aan elkaar rakende cirkels ligt op de lijn door de middelpunten van die twee cirkels, dus Q_1 ligt op de lijn door P_2 en M_1 . Daarom is de straal $|P_2Q_1|$ van de grote halve cirkel gelijk aan $|P_2M_1| + |M_1Q_1|$, waarbij $|\cdot|$ staat voor de afstand tussen twee punten.

Merk op dat $|M_1Q_1| = 1$. Omdat $P_1P_2M_2M_1$ een rechthoek is, kunnen we $|P_2M_1|$ met de stelling van Pythagoras uitrekenen:

$$|P_2M_1| = \sqrt{|P_2M_2|^2 + |M_2M_1|^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Dus $|P_2Q_1| = |P_2M_1| + |M_1Q_1| = \sqrt{5} + 1$.

10 (20 punten)

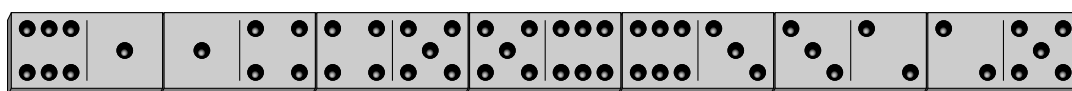
Stel dat n een van de getallen 1, 2, 3, 4, 5 of 6 is. Ongeacht de waarde van n , bevat de verzameling van 15 dominostenen in totaal 5 halve dominostenen met n ogen. 4 van die halve dominostenen kunnen twee aan twee tegen elkaar aanliggen, maar voor de vijfde halve dominosteen met n ogen lukt dat zeker niet. Er zijn echter twee halve dominostenen die niet tegen een andere dominosteen aan hoeven te liggen, namelijk bij de twee uiteinden van het rijtje.

Dus voor twee waarden van n kunnen wellicht toch 5 halve dominostenen met n ogen in een aansluitend rijtje. Om het tekort te minimaliseren, nemen we $n = 5$ en $n = 6$, zodat voor $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ en $n = 4$ het aantal halve dominostenen met n ogen ten hoogste 4 is. Het tekort is daarom tenminste $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Een tekort van 10 is inderdaad mogelijk. We halen de volgende 2 dominostenen weg.



Van de overgebleven 13 dominostenen vormen de 7 met een oneven aantal ogen een aansluitend rijtje, namelijk

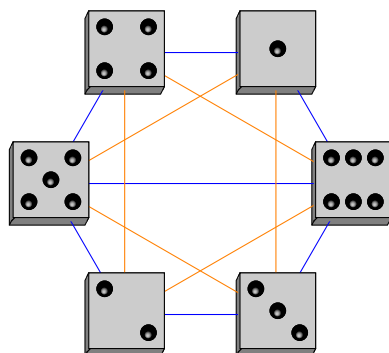


De 6 overgebleven dominostenen met een even aantal ogen vormen 2 aansluitende rijtjes van 3 dominostenen (waarvan de uiteinden hetzelfde zijn), namelijk



Deze twee rijtjes van 3 dominostenen kunnen we aan de voorkant en de achterkant van bovenstaand rijtje van 7 dominostenen toevoegen.

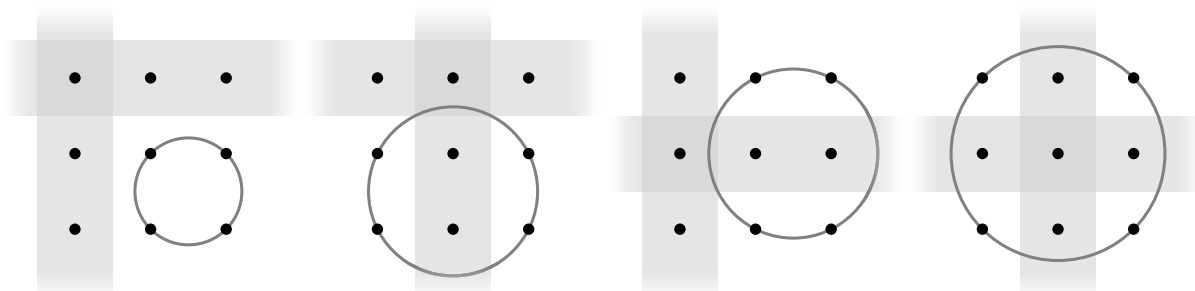
We kunnen het probleem ook een beetje anders voorstellen. We stellen de 6 mogelijke halve dominostenen voor als punten, en verbinden elk tweetal punten met lijnen, behalve de 2 tweetallen die overeenkomen met de 2 weggelaten dominostenen. Zo krijgen we een zogenaamde graaf.



Het maken van een rijtje met tekort 10 komt nu overeen met wat in de grafentheorie het vinden van een Eulerpad wordt genoemd.

11 (30 punten)

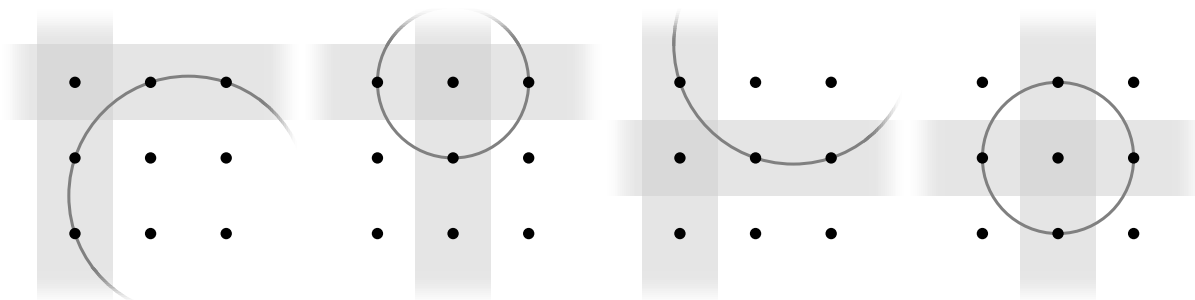
We kunnen op $3 \times 3 = 9$ manieren een rij r en een kolom k van ons rooster kiezen. De doorsnede van de andere twee rijen en andere twee kolommen vormt dan een viertal punten, welke de hoekpunten van een rechthoek zijn. Daarom gaat er een cirkel door deze vier punten.



Omdat een cirkel geen drie punten op een lijn bevat, komt alleen het punt dat de doorsnede vormt van rij r en kolom k nog in aanmerking als eventueel vijfde roosterpunt op de cirkel. Men gaat echter eenvoudig na dat ook dit punt geen vijfde roosterpunt op de cirkel kan zijn.

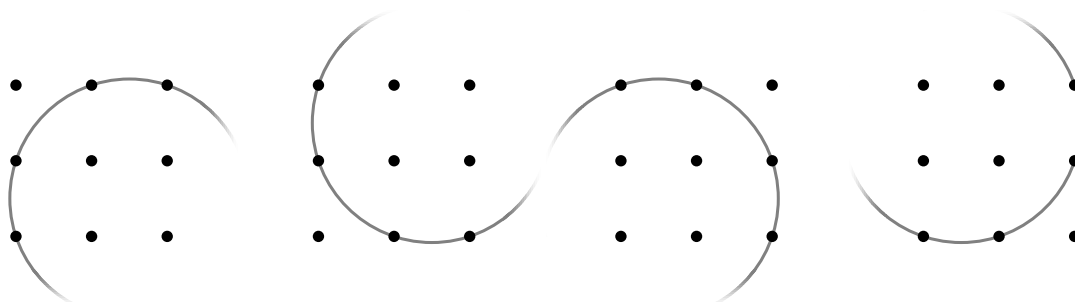
Dus er zijn 9 van deze rechthoekscirkels, en die gaan niet door andere roosterpunten dan de hoekpunten van de rechthoek.

Neem nu aan dat dat we een cirkel hebben door 4 of meer roosterpunten die anders is dan de hierboven beschreven rechthoekscirkels. Het aantal rijen van het rooster is kleiner dan 4, dus er is een rij r van het rooster met twee punten waar de cirkel doorheen gaat. Omdat een cirkel geen drie punten op een lijn bevat, ligt het derde punt van rij r niet op de cirkel. Zeg dat dit derde punt de doorsnede is van rij r met kolom k van het rooster.

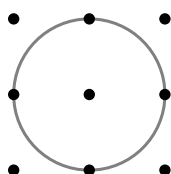


Omdat de cirkel anders is dan de hierboven beschreven rechthoekscirkels, komen er nog maar twee punten in aanmerking als eventueel derde punt op de cirkel, namelijk de punten van kolom k die niet in rij r liggen. Het eventuele vierde punt is dan het andere van die twee punten en een vijfde punt is er niet.

Als de twee punten op rij r naast elkaar liggen, hebben we de volgende 4 mogelijkheden voor de cirkel.



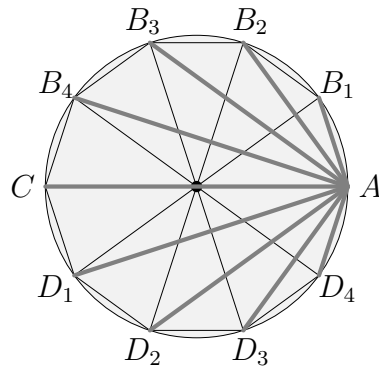
Liggen de twee punten op rij r niet naast elkaar, dan ziet de cirkel er zo uit.



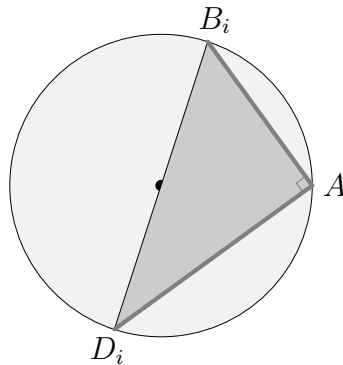
Het antwoord is dus $9 + 4 + 1 = 14$.

12 (20 punten)

Noem het gekozen hoekpunt A en de daarop volgende hoekpunten tegen de klok in B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , C , D_1 , D_2 , D_3 en D_4 .



Lijnstuk AC gaat door het middelpunt van de cirkel en heeft dus lengte 2. Maar ook lijnstuk B_iD_i gaat door het middelpunt van de cirkel voor elke i . Dus lijnstuk B_iD_i heeft lengte 2 en hoek D_iAB_i is 90 graden voor elke i .



Schrijf $|\cdot|$ voor de afstand tussen twee punten. Omdat hoek D_iAB_i 90 graden is voor elke i , is

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 |AB_i|^2 + |AC|^2 + \sum_{i=1}^4 |AD_i|^2 &= |AC|^2 + \sum_{i=1}^4 (|D_iA|^2 + |AB_i|^2) \\ &= |AC|^2 + \sum_{i=1}^4 |D_iB_i|^2 \\ &= 2^2 + 4 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

Dus het antwoord is 20.

13 (30 punten)

We kijken eerst naar de 6 stappen voor de laatste 2 cijfers.

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{0}\boxed{0} \rightsquigarrow \boxed{}\boxed{}\boxed{1}\boxed{5}$$

Omdat het derde cijfer nooit groter mag zijn dan het vierde cijfer, kan de volgorde van deze 6 stappen op 5 manieren gekozen worden. Het derde cijfer wordt immers opgehoogd direct na een ophoging van het vierde cijfer, wat 5 maal gebeurt.

Aan dit rijtje van 6 stappen kunnen we het voor de eerste maal ophogen van het eerste cijfer toevoegen, samen 7 stappen.

$$\boxed{0}\boxed{}\boxed{0}\boxed{0} \rightsquigarrow \boxed{1}\boxed{}\boxed{1}\boxed{5}$$

Dit toevoegen kan op 7 manieren. Stel dat vervolgens in de p -de van 7 stappen het eerste cijfer wordt opgehoogd. Dan is p een van de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, afhankelijk van de gekozen manier van toevoeging.

Aan het rijtje van 7 stappen kunnen we het voor de tweede maal ophogen van het eerste cijfer toevoegen. Dit geeft uiteindelijk een rijtje van 8 stappen.

$$\boxed{0}\boxed{}\boxed{0}\boxed{0} \rightsquigarrow \boxed{2}\boxed{}\boxed{1}\boxed{5}$$

Dit toevoegen kan op $8 - p$ manieren. $8 - p$ is een van de getallen $8 - 1, 8 - 2, 8 - 3, 8 - 4, 8 - 5, 8 - 6, 8 - 7$, oftewel 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Daarom kunnen de twee stappen voor het eerste cijfer op

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

manieren worden toegevoegd aan de 6 stappen voor de laatste 2 cijfers.

Elke mogelijk rijtje van 6 stappen voor de laatste 2 cijfers en elke toevoeging van 2 stappen voor het eerste cijfer geeft een ander mogelijk rijtje van 8 stappen. Dus het antwoord is tenminste

$$5 \times 28 = 140$$

Omgekeerd kunnen we elk mogelijk rijtje van 8 stappen maken, door 2 stappen voor het eerste cijfer toe te voegen aan een mogelijk rijtje van 6 stappen voor de laatste 2 cijfers. Dus het antwoord is ook ten hoogste 140.

14 (20 punten)

Noem de vier getallen a, b, c en d , en wel zo dat $a \leq b \leq c \leq d$. Omdat alle zes uitkomsten verschillend zijn, is $a < b < c < d$. Bovendien geldt

$$a + b = 8 \qquad a + c = 10 \qquad b + d = 20 \qquad c + d = 22$$

$$\text{Dus } d - a = (b + d) - (a + b) = 20 - 8 = 12.$$

Verder is

$$b + c = (a + b) + (a + c) - 2a = 18 - 2a \quad \text{en} \quad a + d = d - a + 2a = 12 + 2a$$

Omdat $a + d$ gelijk aan 14 of 16 is, is $a = 1$ of $a = 2$. Dat is allebei mogelijk, want $b + c$ is dan gelijk aan respectievelijk 16 of 14.

Dus Geert heeft ofwel 1, 7, 9 en 13 gekozen, ofwel 2, 6, 8 en 14.

15 (30 punten)

Kies een coördinatenstelsel met eenheden van 1 km, oorsprong A , x -as AB en y -as AD . Dan is $A = (0, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (5, 5)$ en $D = (0, 5)$.

Boot nummer 1 vaart van het punt $(0, 0)$ naar het punt $(5, 5)$. Boot nummer 2 vaart van het punt $(5, 5)$ naar het punt $(0, 5)$. Dus op het moment dat boot 1 zich op punt (x, x) bevindt, is boot 2 op punt $(5 - x, 5)$. De afstand tussen beide boten is dan

$$\sqrt{(x - (5 - x))^2 + (x - 5)^2}$$

dus we moeten $(x - (5 - x))^2 + (x - 5)^2$ minimaliseren.

$(x - (5 - x))^2 + (x - 5)^2$ is gelijk aan

$$(2x - 5)^2 + (x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25 + x^2 - 10x + 25 = 5x^2 - 30x + 50$$

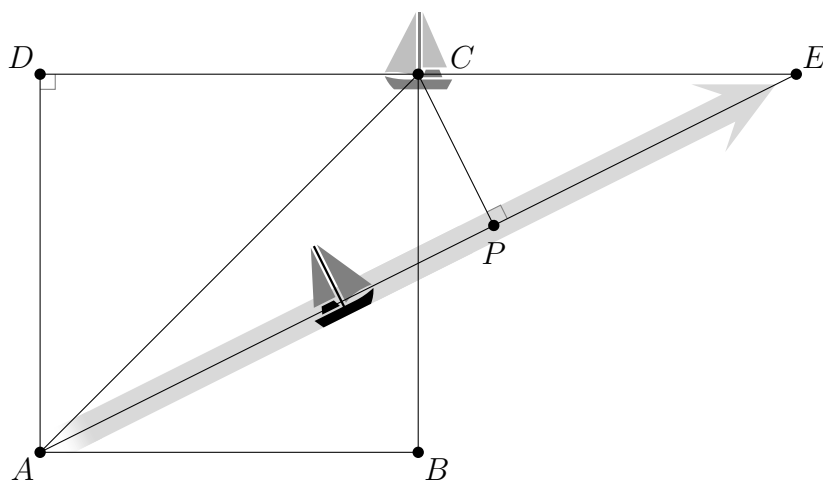
Via kwadraat afsplitsen zien we dat

$$5x^2 - 30x + 50 = 5(x^2 - 6x + 10) = 5(x^2 - 6x + 9 + 1) = 5((x - 3)^2 + 1) \geq 5$$

Het kwadraat van de minimale afstand wordt bereikt bij $x = 3$ en is gelijk aan 5. Het antwoord is dus $\sqrt{5}$.

Een andere oplossing gaat als volgt. We bekijken het gebeuren zoals het koningskind op boot 2 het ziet. Boot 2 gaat van C naar D , dus naar 'links'. Daarom ziet het koningskind op boot 2 het water naar 'rechts' gaan. Maar het is natuurlijk de boot die beweegt en niet het water.

Toch kunnen we er (in gedachten) voor zorgen dat het water beweegt in plaats van boot 2. Tegelijkertijd met de tochten van de twee boten verplaatsen we de zee met beide boten erbij met constante snelheid, zodanig dat boot 2 bij C blijft.



Boot 2 blijft op $(5, 5)$, dus boot 2 bevindt zich x kilometer 'rechts' van zijn oorspronkelijke positie $(5 - x, 5)$. Boot 1 bevindt zich ook x kilometer 'rechts' van zijn oorspronkelijke positie (x, x) , dus op $(2x, x)$. Boot 1 'vaart' dus in de nieuwe situatie met constante snelheid van $A = (0, 0)$ naar $E = (10, 5)$.

Boot 1 gaat dus over lijnstuk AE van A naar E , en komt onderweg op het punt P van lijnstuk AE dat het dichtst bij C ligt. Via de gelijkvormigheid van driehoek AED en driehoek CEP kan men afleiden dat de afstand tussen C en P gelijk is aan $\sqrt{5}$ kilometer.

16 (20 punten)

Merk op dat $9 \cdot a = (10 \cdot a - 1) - (a - 1)$. Definieer $\tilde{c}_9 = c_9 - 1$. Dan is $c_8 \leq \tilde{c}_9 < 9$. Verder is

$$a - 1 = c_1 c_2 c_3 \cdots c_9 - 1 = c_1 c_2 \cdots c_8 \tilde{c}_9$$

en

$$10 \cdot a - 1 = c_1 c_2 c_3 \cdots c_9 0 - 1 = c_1 c_2 \cdots c_8 \tilde{c}_9 9$$

Omdat $\tilde{c}_9 < 9$, is het laatste cijfer van $a - 1$ kleiner dan het laatste cijfer van $10 \cdot a - 1$. Omdat $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_8 \leq \tilde{c}_9$, is het i -na-laatste cijfer van $a - 1$ kleiner dan of gelijk aan het i -na-laatste cijfer van $10 \cdot a - 1$, voor alle i waarvoor het i -na-laatste cijfer van $a - 1$ bestaat.

Hieruit volgt dat de som van de cijfers van $9 \cdot a = (10 \cdot a - 1) - (a - 1)$ gelijk is aan de som van de cijfers van $10 \cdot a - 1$ min de som van de cijfers van $a - 1$. Het antwoord is dus

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_8 + \tilde{c}_9 + 9) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_8 + \tilde{c}_9) = 9$$

17 (30 punten)

Stel dat a het eerste en b het laatste cijfer is van een van de getallen die we zoeken. Dan is $100 \cdot a + b$ een van de getallen die we zoeken en $10 \cdot a + b$ een deler ervan. Noem het quotiënt c , dus

$$\frac{100 \cdot a + b}{10 \cdot a + b} = c$$

Dan is c een positief geheel getal, $c < 10$ en

$$100 \cdot a + b = c \cdot (10 \cdot a + b)$$

Hieruit volgt dat

$$100 \cdot a + b = c \cdot 10 \cdot a + c \cdot b$$

en

$$(10 - c) \cdot 10 \cdot a = (c - 1) \cdot b \tag{*}$$

Omdat $a \geq 1$, is

$$(10 - c) \cdot 10 \leq (c - 1) \cdot b < (c - 1) \cdot 10$$

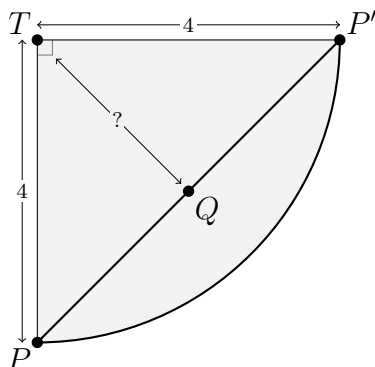
dus $10 - c < c - 1$ en $11 < 2c$. Omdat $c < 10$, is c een van de getallen 6, 7, 8 en 9.

- Stel dat $c = 6$. Dan volgt uit (*) dat $4 \cdot 10 \cdot a = 5 \cdot b$, dus $a = 1$ en $b = 8$.
- Stel dat $c = 7$. Dan volgt uit (*) dat $3 \cdot 10 \cdot a = 6 \cdot b$, dus $a = 1$ en $b = 5$.
- Stel dat $c = 8$. Dan volgt uit (*) dat $2 \cdot 10 \cdot a = 7 \cdot b$, maar dat kan niet.
- Stel dat $c = 9$. Dan volgt uit (*) dat $1 \cdot 10 \cdot a = 8 \cdot b$, dus $a = 4$ en $b = 5$.

Het antwoord is dus $108 + 105 + 405 = 618$.

18 (20 punten)

We knippen de mantel van de kegel door op het lijnstuk tussen P en T . Als we deze platvouwen, krijgen we een deel van een cirkelschijf, een zogenaamde *taartpunt*. Omdat we het punt P doormidden hebben geknipt, heeft de taartpunt twee punten P . Voor het onderscheid noemen we een van die punten P' .



De cirkelboog van P naar P' is van een cirkel met straal 4, en de lengte ervan is gelijk aan de omtrek van de grondcirkel van de kegel, die straal 1 had. Dat is een kwart van de omtrek van een cirkel met straal 4, dus de taartpunt is een kwart van een cirkelschijf met straal 4.

Het elastiek vormt nu een lijnstuk van P naar P' . Omdat het elastiek voor het openknippen ook al zo kort mogelijk was, bevond de elastiek zich voor het openknippen van de mantel van de kegel op dezelfde posities ervan.

Zo ook het punt Q , dat nu precies tussen P en P' inligt. Met gelijkvormigheid of het aanbrengen van een coördinatenstelsel kan met inzien dat de afstand tussen Q en T gelijk aan $2\sqrt{2}$ is. Dat was voor het openknippen van de mantel van de kegel ook al zo.

19 (30 punten)

Definieer $c = b - a$. Dan is $c \geq 1$ en

$$2015 = b^3 - a^3 = (a + c)^3 - a^3 = 3a^2c + 3ac^2 + c^3 = (3a^2 + 3ac + c^2) \cdot c$$

We schrijven c in de vorm $c = 3 \cdot q + r$, waarbij q het quotient en r de rest is van de deling van c door 3. Omdat de rest bij deling door 3 van 2015 gelijk aan 2, is de rest bij deling door 3 van $(3a^2 + 3ac + c^2)c$ ook 2. Dit is precies zo als $r = 2$.

Als $c \geq 15$, is

$$2015 = (3a^2 + 3ac + c^2) \cdot c \geq c^3 \geq 225 \cdot 15 > 200 \cdot 15 = 3000$$

wat een tegenspraak oplevert. Dus $c \leq 14$. Verder is c oneven, want 2015 is oneven. Combineren we dit met dat $r = 2$, dan zien we dat $c = 5$ of $c = 11$.

5 is een deler van 2015, en $2015 = 5 \cdot 403$. Omdat $4 \cdot 9 \cdot 11 = 4 \cdot (100 - 1) = 400 - 4$, zien we dat de rest bij deling door 11 van 403 gelijk is aan 7. Dus 11 is geen deler van 2015 en $c \neq 11$. Daarom is $c = 5$.

We moeten dus een positief geheel getal a vinden, zo dat

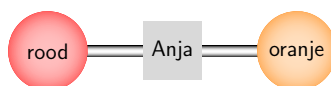
$$3a^2 + 15a + 25 = 403$$

oftewel $3a(a+5) = 403 - 25 = 378$. Dus $a(a+5) = 126$. Als $a \geq 10$, is $a(a+5) \geq 10 \cdot 15 = 150$, wat een tegenspraak oplevert. Dus $a \leq 9$. Verder is 126 deelbaar door 9, dus $a = 4$ of $a = 9$. Omdat $4(4+5) = 36 < 126$, moet a wel gelijk aan 9 zijn.

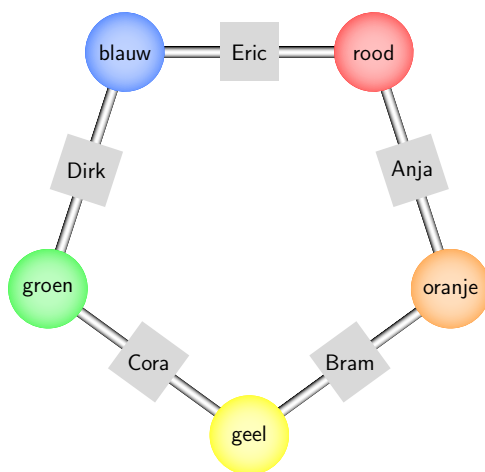
Inderdaad is $9(9+5) = 126$. Dus $a = 9$ en $b = a + c = 9 + 5 = 14$. Daarom is het antwoord $a + b = 9 + 14 = 23$.

20 (30 punten)

Er zijn 5 gegevens waar een dikke zwarte stip voor staat. Het eerste van die gegevens is dat Anja evenveel rode als oranje hoedjes ziet. Dit kan als volgt in een plaatje worden weergegeven.



Net zo kunnen de andere 4 gegevens waar een dikke zwarte stip voor staat in een plaatje worden weergegeven. Dit doen we in onderstaande figuur.



We zeggen dat twee kleuren *aan elkaar grenzen* als ze met een lijn verbonden zijn in bovenstaande figuur.

Noem het aantal hoedjes in een kleur die het meeste voorkomt m . We bewijzen eerst dat er tenminste $5m - 4$ hoedjes zijn. Hierbij onderscheiden we drie gevallen.

- *Er is slechts een kleur is die m maal voorkomt.*

We tonen aan dat dit geval niet optreedt. Zeg dat rood de enige kleur is die m maal voorkomt (de andere kleuren gaan net zo). Anja ziet evenveel rode als oranje hoedjes, terwijl het aantal oranje hoedjes kleiner is dan m . Dit is alleen mogelijk als Anja zelf een rood hoedje op heeft (het aantal oranje hoedjes is dan $m - 1$). Eric ziet evenveel rode als blauwe hoedjes, terwijl het aantal blauwe hoedjes kleiner is dan m . Dit is

alleen mogelijk als Eric zelf een rood hoedje op heeft (het aantal blauwe hoedjes is dan $m - 1$). Maar gegeven is dat Anja en Eric hoedjes van verschillende kleuren ophebben, dus dat kan niet.

- *Er zijn twee aan elkaar grenzende kleuren die m maal voorkomen.*

Zeg dat rood en oranje m maal voorkomen (mogelijk zijn er nog andere kleuren die m maal voorkomen). Bram ziet evenveel oranje als gele hoedjes, dus het aantal gele hoedjes is tenminste $m - 1$. Cora ziet evenveel gele als groene hoedjes, dus het aantal groene hoedjes is tenminste $(m - 1) - 1 = m - 2$. Eric ziet evenveel rode als blauwe hoedjes, dus het aantal blauwe hoedjes is tenminste $m - 1$. Het totaal aantal hoedjes is daarom tenminste $m + m + (m - 1) + (m - 2) + (m - 1) = 5m - 4$.

- *Er zijn twee kleuren die m maal voorkomen, maar niet twee aangrenzende kleuren.*
Men kan op dezelfde manier als in het vorige geval afleiden dat er $m + (m - 1) + m + (m - 1) + (m - 1) = 5m - 3$ hoedjes zijn. Het totaal aantal hoedjes is dus ook in dit geval tenminste $5m - 4$.

Overigens is het totaal aantal hoedjes ten hoogste $5m$.

Eric ziet dus tenminste $5m - 5$ hoedjes. Als Eric ten hoogste $m - 1$ blauwe hoedjes ziet, ziet Eric ook ten hoogste $m - 1$ rode hoedjes, samen dus ten hoogste $2m - 2$ rode en blauwe hoedjes bij elkaar. Omdat $2m - 2 < \frac{1}{2}(5m - 5)$ zijn, is het aantal blauwe en rode hoedjes dat Eric ziet minder dan de helft van het totaal aantal hoedjes dat Eric ziet. Dit is in tegenspraak met het gegeven, dat het totaal aantal blauwe en rode hoedjes dat Eric ziet even groot is als het totaal aantal andere (groene, gele en oranje) hoedjes dat hij ziet. Eric ziet daarom m blauwe hoedjes en dus ook m rode hoedjes.

Verder ziet Eric nog $2m$ andere hoedjes, dus in totaal $4m$ hoedjes. Er zijn dus $4m + 1$ hoedjes. Maar we zagen eerder dat er tenminste $5m - 4$ hoedjes zijn, dus $5m - 4 \leq 4m + 1$, oftewel $m \leq 5$. Het aantal leerlingen is gelijk aan het aantal hoedjes en is dus van de vorm $4m + 1$. Verder is het aantal leerlingen ten hoogste $4 \times 5 + 1 = 21$, want $m \leq 5$. Omdat het aantal leerlingen niet 1, 5, 9, 13 of 17 is, moet het antwoord wel 21 zijn.

Het antwoord 21 is inderdaad mogelijk.



Zonder de laatste conditie zijn de antwoorden 17, 13, 9 en 5 ook mogelijk.



