
WISKUNDE-ESTAFETTE KUN 2000

Uitwerkingen

1

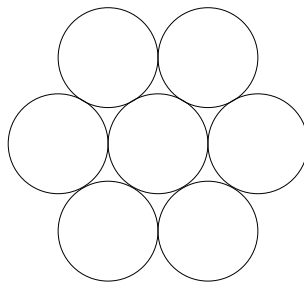
Je vindt snel een oplossing door te beginnen met het kleuren van de buren van de vakjes in de linkerbovenhoek en in de rechterbovenhoek. Vervolgens kijk je naar de buren van die vakjes waar een 0 in staat.

2

$$\begin{aligned} & 81 + 80(81 + 81^2 + 81^3 + \cdots + 81^{30}) \\ &= 81 + (81 - 1)(81 + 81^2 + 81^3 + \cdots + 81^{30}) \\ &= 81 + (81^2 + 81^3 + \cdots + 81^{31}) - (81 + 81^2 + \cdots + 81^{30}) \\ &= 81^{31} = 3^{124}. \end{aligned}$$

3

De stroopwafels moet je als volgt neerleggen:



De straal van het bord dient dus 9 cm te zijn.

4

We schrijven enkele van de optredende configuraties op:

SDK DSK DKS KDS KSD SKD SDK

Na zes verwisselingen zijn we dus weer in de uitgangspositie. 2000 verwisselingen hebben dus hetzelfde effect als $2000 - 6 \cdot 333 = 2$ verwisselingen. De volgorde na 2000 verwisselingen is dus *DKS*.

5

De driehoeken BCF en DCE zijn gelijkvormig. Daarom is CE twee maal zo lang als CF . Omdat driehoek ECF een oppervlakte heeft van 25 cm^2 is CE 10 cm lang. Omdat CD 8 cm lang is, heeft DE lengte 6 cm, dus de lengte van AE is 2 cm.

6

We eisen o.a. dat

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{10}^2, \\x_2 &= x_1^2 + x_3^2 + \cdots + x_{10}^2.\end{aligned}$$

Door aftrekken volgt hieruit dat $x_1 - x_2 = x_2^2 - x_1^2$, d.w.z. $(x_1 - x_2)(1 + x_1 + x_2) = 0$ en omdat $x_1 > 0$ en $x_2 > 0$, volgt dat $x_1 = x_2$. Net zo bewijs je dat $x_3 = x_1$, $x_4 = x_1$, etc. De eis is dus dat $x_1 = 9x_1^2$, dus $x_1 = 1/9$. We hebben dus $x_j = 1/9$, voor $j = 1, \dots, 10$.

7

Omdat $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ en $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, is de oppervlakte van de winkelhaak: $\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (n+1)^3$. We zien dus dat $1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3 = 1 + \frac{1}{4}2^23^2 - \frac{1}{4}1^22^2 + \cdots + \frac{1}{4}100^2101^2 - \frac{1}{4}99^2100^2 = \frac{1}{4}100^2101^2 = 25502500$.

8

Eerst een opmerking vooraf: de straal van de ingeschreven cirkel van een rechthoekige driehoek met een hoek van 60° en een korte rechthoekszijde a is gelijk aan $\frac{1}{2}a(\sqrt{3} - 1)$.

Noem het snijpunt van AB met de vouwlijn S . SP en SA zijn even lang, dus $\angle APS = 30^\circ$. Daar zie je aan dat $\angle CPR = 60^\circ$. Omdat $AB = 3$, is $BP = \sqrt{3}$ en $CP = 3 - \sqrt{3}$. Daaruit volgt dat $PR = 2(3 - \sqrt{3})$ en $RC = (3 - \sqrt{3})\sqrt{3}$. PCR is een rechthoekige driehoek met een hoek van 60° . De korte rechthoekszijde is $3 - \sqrt{3}$. De straal van de ingeschreven cirkel is dus $(3 - \sqrt{3})\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} - 3$.

9

p^k heeft $k+1$ delers, nl. $1, p, p^2, \dots, p^k$. De vraag is: voor welke paren (p, k) is $p^k = 16(k+1)$. p moet dus even zijn, dus $p = 2$. We eisen dus $2^k = 16(k+1)$, d.w.z. $2^{k+1} = 32(k+1)$. Omdat de functie $k \mapsto \frac{2^{k+1}}{k+1}$ strikt stijgend is op \mathbb{N}^* , is er ten hoogste één oplossing. Je ziet snel dat $k = 7$ voldoet.

10

Laat vanuit C een loodlijn neer op AB en trek hem door tot hij AX snijdt in S . Merk op dat $\angle SCX = \angle SXC$, dus dat driehoek CSX gelijkbenig is. Daarom is SB behalve zwaartelijn ook hoogtelijn, dus SB staat loodrecht op CX . Vanwege de symmetrie staat SA dan ook loodrecht op CA , dus is driehoek ACX rechthoekig en de schuine zijde CX is tweemaal zo lang als de rechthoekszijde AC . Bijgevolg is $\angle ACB = 60^\circ$. Dan is ook $\angle ABC = 60^\circ$ en $\angle BAC = 60^\circ$.

11

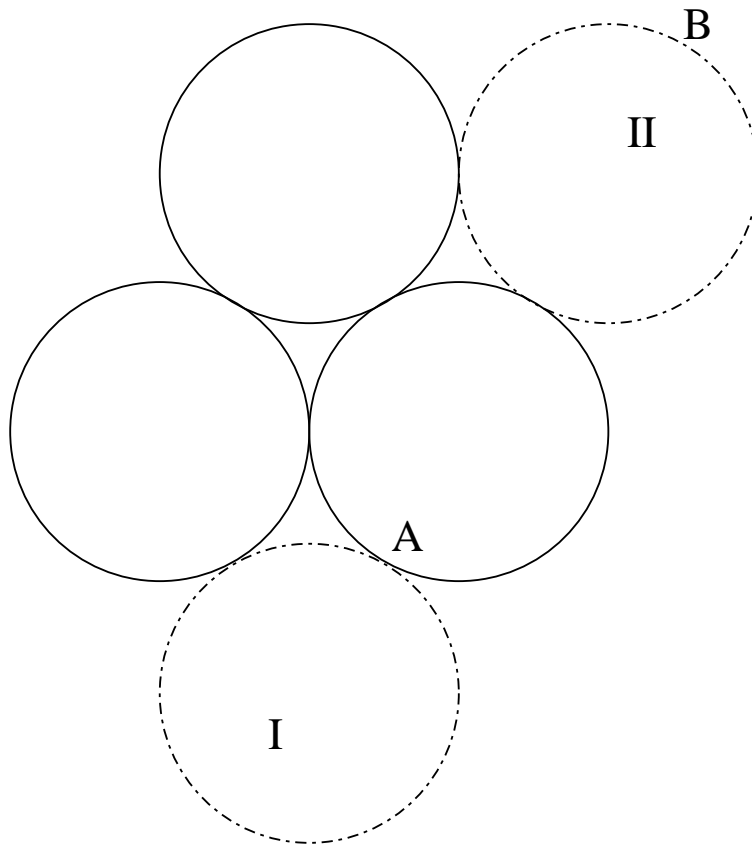
Er zijn niet zoveel mogelijkheden voor de machten van twee (128, 256, 512) en ook niet voor de veelvouden van 37.

12

Het aantal personen met zowel een das als een bril als sandalen noemen we x . Het totaal van 19 bestaat uit: 11 bril dragers, 11 das dragers, 7 sandal dragers. Op deze manier zijn enkele personen meer dan eens geteld, n.l. 5 personen met een bril en een das, 3 personen met een das en sandalen en 4 personen met sandalen en een bril. Echter ook nu schieten we weer door. De x personen met das, bril en sandalen boeken we nu drie maal. We zien dus dat $19 = (11 + 11 + 7) - (5 + 3 + 4) + x$. Blijkbaar is $x = 2$.

13

Als het vierde dubbeltje door rollen van positie I naar positie II is gekomen (het heeft dan langs de halve omtrek van een der drie dubbeltjes gerold) is punt A verplaatst naar B. Het dubbeltje is dan al één maal om zijn as gedraaid.



Het antwoord is dus: 3 maal.

14

Zij M het middelpunt van de cirkelschijf. Merk op dat $\triangle AMD \cong \triangle RQM$. Daarom is $AD = MR$. Omdat $AB = AD$ volgt hieruit dat $BR = \frac{1}{2}AB$. We hebben ook $BP = \frac{1}{2}AB$.

Blijkbaar is rechthoek $BPQR$ een vierkant waarvan de zijde half zo lang is als de zijde van vierkant $ABCD$. De gevraagde oppervlakte is dus 25 cm^2 .

15

$1993^4, 93^4$ en $(-7)^4$ geven bij deling door 100 dezelfde rest. $(-7)^4 = 2401$ en geeft dus rest 1. Nu $1993^{1993} = 1993 \cdot 1993^{4 \cdot 498}$, dus 1993^{1993} geeft bij deling door 100 rest 93.

16

$a + b + c + d + e + f + g = 28$. Omdat $y(28 - y) = 196 - (y - 14)^2$, is het product van y en $28 - y$ maximaal als $y - 14$ minimaal is. Neem dan $a + b = 6 + 7$. Het gevraagde maximum is 195.

17

Omdat $5a \leq a + b + c + d + e \leq 5e$ zien we dat $bcde \geq 5$ en $abcd \leq 5$. Voor a, b, c, d, e zijn er nog maar weinig mogelijkheden. Systematisch nagaan voert tot de rijtjes $(1, 1, 1, 3, 3)$, $(1, 1, 2, 2, 2)$ en $(1, 1, 1, 2, 5)$.

18

$n = a_k a_{k-1} \dots a_2 7$. $5n = 7a_k a_{k-1} \dots a_2$. We hebben dus $\frac{1}{10}(n - 7) + 7 \cdot 10^{k-1} = 5n$ en dat leidt tot $7n = 10^k - 1$. Hieruit volgt dat $k = 6$, $n = 142857$.

19

$2m^2 + n^2 = 2mn + 3n$ herschrijven we tot $4m^2 - 4mn + n^2 + n^2 - 6n + 9 = 9$, oftewel $(2m - n)^2 + (n - 3)^2 = 9$. Omdat 9 slechts op weinig manieren te schrijven is als de som van twee kwadraten ($9 = (\pm 3)^2 + 0^2$) komen we tot de oplossingen $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$, $(3, 6)$.

20

Merk op dat $\angle IAC = 45^\circ$, dus dat $\angle IAB = 135^\circ$. Omdat $\angle IBA = 22^\circ 30'$, is $\angle BIA = 22^\circ 30'$, dus $\triangle BIA$ is gelijkbenig. Bijgevolg is $IA = \sqrt{2}$. We zien ook dat IA loodrecht staat op AD en dat $AD = 1$. We hebben dus $DI = \sqrt{3}$.