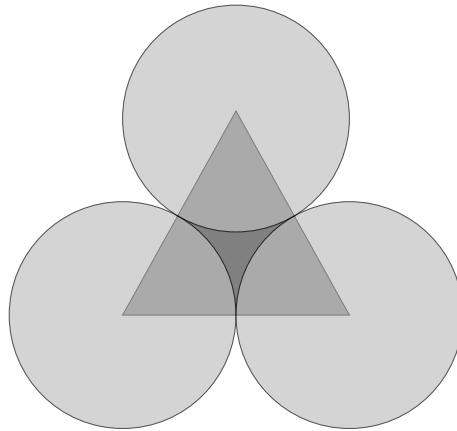

WISKUNDE-ESTAFETTE 2014**Uitwerkingen**

1

Onderstaande figuur verschilt van die in de opgave, want de cirkels zijn nu gedeeltelijk doorzichtig getekend. Zo zien we hoe de inkleuring van het door de cirkels ingesloten gebied tot stand is gekomen in de opgave.

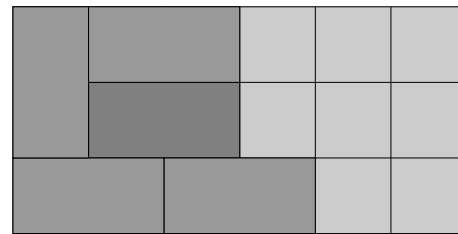
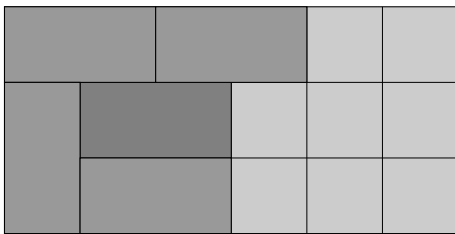


Achter de cirkels is namelijk een gelijkzijdige driehoek tussen de middelpunten van de cirkels getekend. De oppervlakte van de driehoek is $\sqrt{3}$ (namelijk $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ met $b = 2$ en $h = \sqrt{3}$).

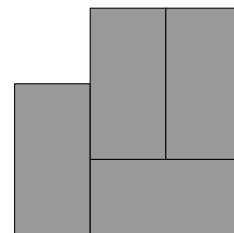
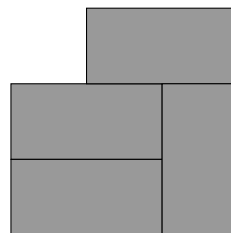
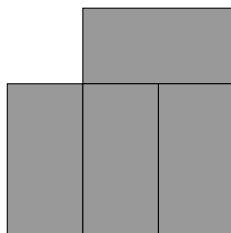
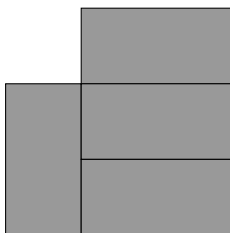
De drie cirkeldelen binnen de driehoek vormen samen een halve cirkel, waarvan de oppervlakte $\frac{1}{2}\pi$ is (namelijk $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$ met $r = 1$). Het antwoord is dus $\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$.

2

De linkerkant van de rechthoek kan op 2 manieren worden gelegd.



Voor de overgebleven vorm zijn 4 betegelingen mogelijk.



Het antwoord is dus $2 \times 4 = 8$.

3

De omtrek van cirkel I is π maal de diameter ervan, dus $\pi \cdot 2$. De lengte van de zijde van vierkant II is een kwart van de omtrek ervan, welke gelijk is aan de omtrek van cirkel I. Dus de lengte van de zijde van vierkant II is $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2 = \frac{1}{2}\pi$.

De oppervlakte van vierkant II is het kwadraat van de zijde, dus $(\frac{1}{2}\pi)^2 = \frac{1}{4}\pi^2$. De oppervlakte van cirkel III is π maal het kwadraat van de straal ervan, dus $\frac{1}{4}\pi d^2$, waarbij d de diameter van cirkel III is.

De oppervlaktes van vierkant II en cirkel III zijn gelijk, dus $\frac{1}{4}\pi^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$. Derhalve is $\pi = d^2$, dus $d = \sqrt{\pi}$.

4

Uit aanwijzing (1) volgt dat de oplossing van de volgende vorm is.

...F...D...E...

Uit aanwijzing (2) volgt dat C niet tussen F en D staat. Aanwijzing (4) vertelt ons dat C niet links van F staat. C staat dus rechts van D. Volgens aanwijzing (3) staat B ook rechts van D.

Derhalve kan behalve F alleen nog A links van D staan. Aanwijzing (4) vertelt ons dat F en D niet naast elkaar staan, dus A staat ertussen. De oplossing is dus van de volgende vorm.

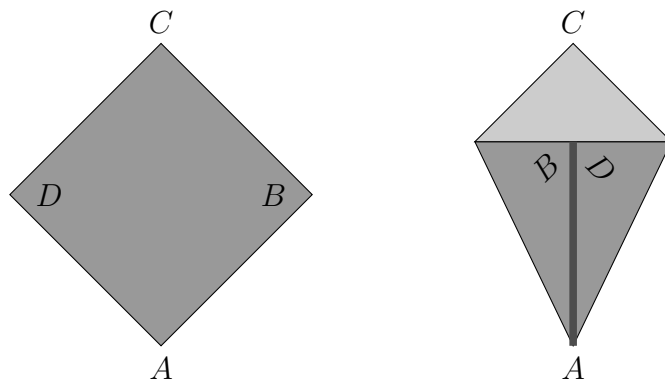
FAD...E...

Uit aanwijzing (4) volgt nu dat C naast D staat. Aanwijzing (3) zegt dat B naast C staat, dus de oplossing is als volgt.

FADCBE

5

Noem de hoekpunten van het vierkant A , B , C en D , zoals hieronder aangegeven.



Bij de vlieger is de hoek bij A dubbellaags geworden. Hierdoor is de grootte van de hoek gehalveerd. De hoek bij A van de vlieger is dus 45 graden. De hoek bij C is nog steeds 90 graden.

Het totaal van de hoeken van de vlieger (en elke andere vierhoek) is 360 graden. Trekken we hier 45 en 90 graden af, dan komen we uit op 225 graden, te verdelen over de twee stompe hoeken van de vlieger.

Vanwege de symmetrie van de vlieger (die gebruiken we nu pas) zijn beide stompe hoeken even groot, dus elk $\frac{225}{2} = 112\frac{1}{2}$ graden. (Het totaal van de stompe hoeken van een niet-symmetrische platgedrukte frietzak is dus ook 225 graden.)

6

De tweecijferige getallen met cijfersom 7 zijn

16, 25, 34, 43, 52, 61, 70.

De tweecijferige getallen in de tafel van 17 zijn

17, 34, 51, 68, 85.

34 is het enige getal dat in beide rijtjes voorkomt. Maar omdat $34+64 = 98$ en $34+81 = 115$ geen elfvouden zijn, kan 34 niet gecombineerd worden met een kwadraat boven de 50. Dus elk van beide bovenstaande rijtjes is goed voor precies één getal van de oplossing.

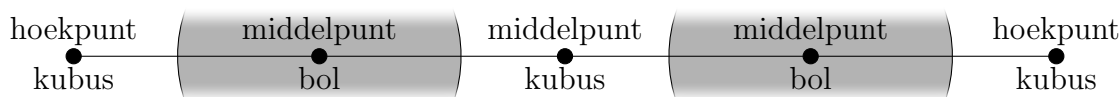
Omdat een van de getallen een kwadraat is, moet een der getallen ofwel 16 ofwel 25 zijn. Het andere getal is groter dan 50 en moet 51, 68 of 85 zijn. We kunnen nu een opteltabel maken

+	51	68	85
16	67	84	101
25	76	93	110

Omdat in bovenstaande tabel alleen het getal 110 een 11-voud is, vormen de getallen 25 en 85 samen een unieke oplossing.

7

Uit de stelling van Pythagoras kunnen we afleiden dat de lichaamsdiagonaal van de kubus lengte $4\sqrt{3}$ heeft. De lichaamsdiagonaal wordt door drie punten in vier gelijke stukken verdeeld. Deze drie punten zijn de middelpunten van twee van de acht bollen en het middelpunt van de kubus. Dit is in de tekening hieronder weergegeven.



De straal van de bol in het midden van de kubus is dus de afstand tussen het middelpunt van een van de acht bollen en het middelpunt van de kubus, minus de straal van een van de acht bollen. Het antwoord is dus $\sqrt{3} - 1$.

8

Het laatste cijfer van $3 + c + c + c$ is 7, dus het laatste cijfer van $3 \cdot c$ is 4. Hieruit volgt dat $c = 8$. We vullen dit in de som in en berekenen telkens het laatste cijfer.

$$\begin{array}{r} 2123 \\ \underline{ab8 +} \\ ***1 \\ \underline{ab8 +} \\ **59 \\ \underline{ab8 +} \\ 32*7 \end{array}$$

De laatste twee cijfers van $23 + b8 + b8$ zijn 59 (in die volgorde), waarbij we $b8$ als $10 \cdot b + 8$ opvatten. Dus de laatste twee cijfers van $20 \cdot b$ zijn 20 (in die volgorde). Hieruit volgt dat $b = 1$ of $b = 6$. We vullen beide mogelijkheden in de som in en berekenen telkens de laatste twee cijfers.

$$\begin{array}{r} 2123 \\ \underline{a18 +} \\ **41 \\ \underline{a18 +} \\ **59 \\ \underline{a18 +} \\ 3277 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2123 \\ \underline{a68 +} \\ **91 \\ \underline{a68 +} \\ **59 \\ \underline{a68 +} \\ 3227 \end{array}$$

Als $b = 1$, dan is $3277 - 2123$ driemaal het te vinden getal. Maar $3277 - 2123 = 1154$ is geen drievoud, dus $b \neq 1$. Als $b = 6$, dan is $3227 - 2123$ driemaal het te vinden getal. Dit is wel een drievoud, want $3227 - 2123 = 1104 = 3 \cdot 368$.

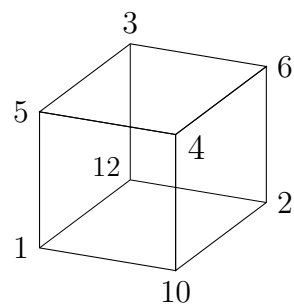
De totale som klopt dus als we $a = 3$ nemen. De laatste twee cijfers van 368 komen overeen met de eerder gevonden b en c , dus de 5 in het tussenresultaat klopt ook. Het antwoord is dus 368.

9

Twee tegenover elkaar liggende zijvlakken van de kubus bevatten samen precies eenmaal elk hoekpunt. Omdat de uitkomst van slechts een zijvlak ontbreekt, zijn er nog altijd twee paren van tegenoverliggende zijvlakken waarvan de uitkomsten wel gegeven zijn.

Derhalve kan het totale som van alle acht getallen op twee manieren geschreven worden als een som van twee van de vijf gegeven uitkomsten. Alleen het getal 43 heeft deze eigenschap: $43 = 18 + 25 = 22 + 21$.

Dus 43 is de som van alle acht getallen. De uitkomst 23 die nog niet in een som voorkomt, vormt samen met de ontbrekende uitkomst het getal 43. Dus die ontbrekende uitkomst is $43 - 23 = 20$.



10

We zoeken geheeltallige oplossingen tussen $\frac{1}{2}$ en $9\frac{1}{2}$ voor $a^2 + b^2 - ab = 10a + b$. Dit laat zich herschrijven tot

$$b^2 - ab - b = 10a - a^2$$

We kunnen beide kanten van deze vergelijking schrijven als een product. Als we bovendien de linkerkant en de rechterkant verwisselen, krijgen we

$$(10 - a) \cdot a = b \cdot (b - (a + 1)) = b \cdot c$$

waarbij we $c = b - (a + 1)$ definiëren.

We schrijven nu de 5 mogelijke uitkomsten van $(10 - a) \cdot a$ op, met bij elke uitkomst de twee mogelijke waarden van $a + 1 = b - c$, om vervolgens factoren c en b van $(10 - a) \cdot a$ te vinden.

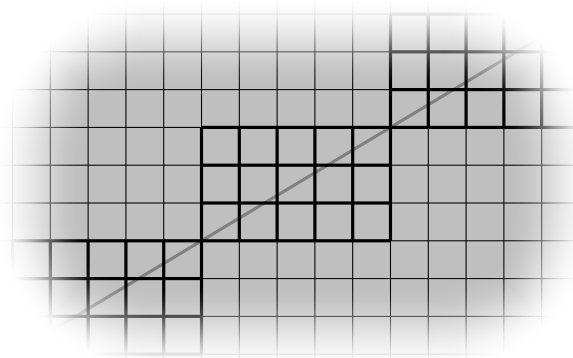
$(10 - a) \cdot a$	$a + 1 = b - c$	$c \cdot b$
$1 \cdot 9 = 9$	2 of 10	$1 \cdot 3 \neq 9$
$2 \cdot 8 = 16$	3 of 9	$1 \cdot 4 \neq 16$
$3 \cdot 7 = 21$	4 of 8	$3 \cdot 7 = 21$
$4 \cdot 6 = 24$	5 of 7	$1 \cdot 6 \neq 24$, $3 \cdot 8 = 24$ en $1 \cdot 8 \neq 24$
$5 \cdot 5 = 25$	6	

We zien dat $b = 7$ en $a = (b - c) - 1 = (7 - 3) - 1 = 3$ een oplossing is, alsmede $b = 8$ en $a = (b - c) - 1 = (8 - 3) - 1 = 4$. Er zijn geen andere oplossingen, dus het antwoord is 37.

11

Omdat $75 = 5 \times 15$ en $45 = 3 \times 15$, kunnen we rechthoek $ABCD$ als volgt verdelen in $15 \times 15 = 225$ rechthoeken van 5 tegels bij 3 tegels: 15 rechthoeken met de lange zijde langs AB en 15 rechthoeken met de korte zijde langs AD .

Zowel horizontaal als verticaal gezien is het punt C 15 rechthoeken van A verwijderd. Derhalve is het punt waar diagonaal AC horizontaal gezien k rechthoeken van A verwijderd is, gelijk aan het punt waar diagonaal AC verticaal gezien k rechthoeken van A verwijderd is, voor $k = 0, 1, 2, \dots, 15$.



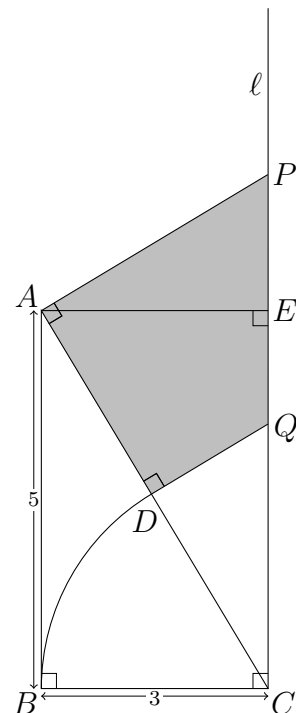
Diagonaal AC bestaat dus uit de diagonalen van 15 rechthoeken van 5 tegels bij 3 tegels. In elk van die 15 rechthoeken gaat de diagonaal door het midden van precies één tegel. Het antwoord is dus 15.

12

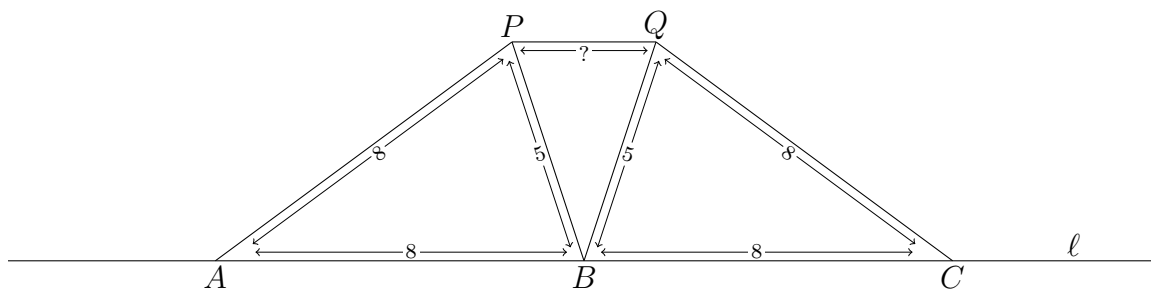
Kies E zo dat vierhoek $ABCE$ een rechthoek is. Dan ligt E op lijn ℓ . Verder is driehoek ABC gelijkvormig (zelfs congruent) met driehoek CEA . Driehoek CEA is op zijn beurt gelijkvormig met driehoek CAP en driehoek CAP is op zijn beurt gelijkvormig met driehoek CDQ . (Overigens heb je punt E niet per sé nodig voor het aantonen van de gelijkvormigheid van driehoek ABC en driehoek CAP .)

Voor gelijkvormige driehoeken geldt, dat hun oppervlakten evenredig zijn met het kwadraat van de lengte van hun eennalangste zijde. De oppervlakte van driehoek ABC is $\frac{15}{2}$, wat we gemakshalve schrijven als 5^2x (waarbij $x = \frac{3}{10}$). De oppervlakte van driehoek CDQ is gelijk aan 3^2x . Volgens de stelling van Pythagoras is de oppervlakte van driehoek CAP gelijk aan $(3^2 + 5^2)x$.

De oppervlakte van vierhoek $ADQP$ is het verschil tussen de oppervlakte van driehoek CAP en de oppervlakte van driehoek CDQ , dus $(3^2 + 5^2)x - 3^2x = 5^2x$. Dit is gelijk aan de oppervlakte van driehoek ABC . Het antwoord is dus $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.



13

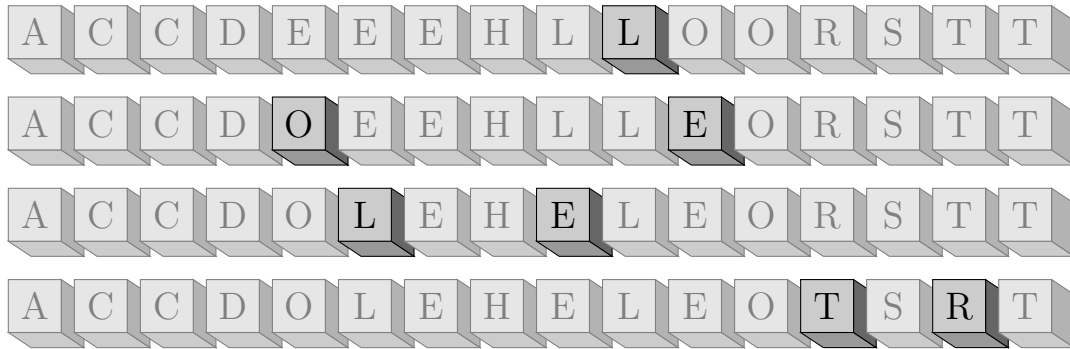


Omdat lijnstuk PQ parallel is met lijn ℓ , is hoek BPQ gelijk aan hoek PBA . Evenzo is hoek PQB gelijk aan hoek CBQ . Hoek CBQ is op zijn beurt weer gelijk aan hoek APB , want driehoek CQB is gelijkvormig (zelfs congruent) met driehoek ABP .

Dus driehoek BPQ is gelijkvormig met driehoek ABP . Door naar verhoudingen van zijden te kijken, zien we dat het antwoord gelijk is aan de oplossing x van $\frac{x}{5} = \frac{5}{8}$. Die oplossing is $x = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$.

14

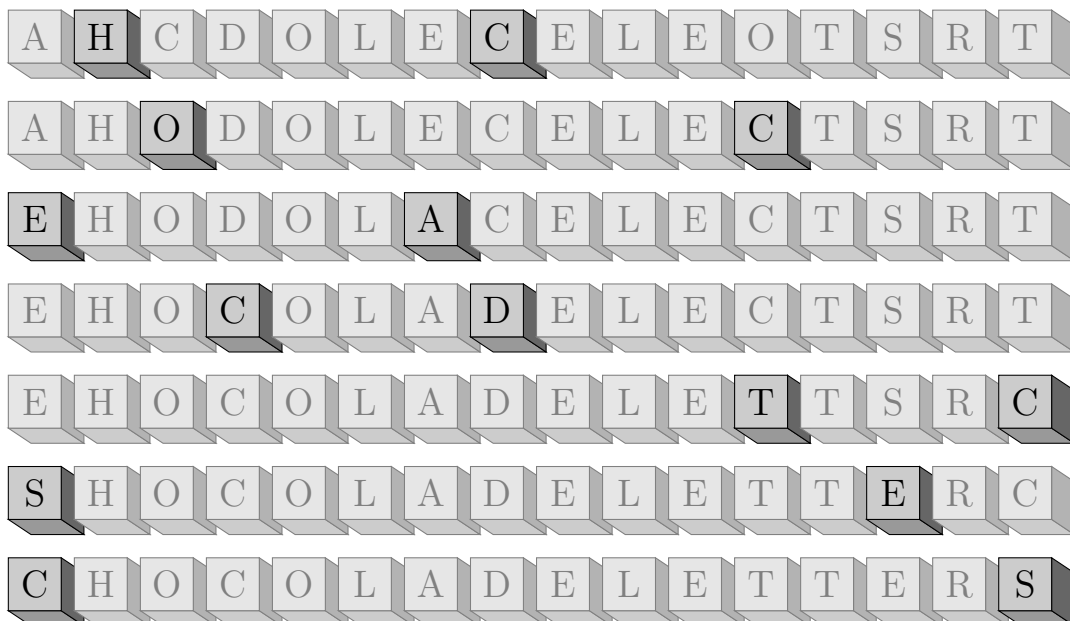
Een van de twee L's staat al op de goede plaats. Vervolgens kunnen we met 3 onderlinge verwisselingen van twee blokken nog eens 6 letters op de goede plaats zetten.



Van de 9 letters die nog niet op de goede plaats staan, is alleen de C nog dubbel.



Omdat de andere 7 letters niet dubbel zijn, staat al vast op welke plaats ze moeten komen. Dit kan door middel van 7 onderlinge verwisselingen van twee blokken. Beide C's komen dan vanzelf ook op de goede plaats.



Dit geeft een totaal van 10 onderlinge verwisselingen van 10 blokken. Dat het antwoord ook daadwerkelijk 10 is, is lastig te bewijzen, zie hieronder en de volgende pagina's.

Voor de geïnteresseerde lezer. Nummer de posities van de blokken met de nummers 1 tot en met 16. Nummer de blokken zelf met de nummers 17 tot en met 32, zodat ze van elkaar te onderscheiden zijn.

Vanaf nu noemen we een onderlinge verwisseling van de twee blokken op twee verschillende posities een *swap*. Schrijf $S_{z,w}$ voor de swap van de twee blokken op positie z en $w \neq z$. Merk op dat $S_{z,w} = S_{w,z}$.

Stel dat R een reeks van k swaps is, waarbij het blok op positie x verplaatst wordt en uiteindelijk op positie y komt.

Bewering I. Als $y = x$, dan bestaat er een reeks \tilde{R} van ten hoogste $k - 2$ swaps met hetzelfde effect als R (maar waarin het blok op positie x niet verplaatst wordt).

Bewering II. Als $y \neq x$, dan bestaat er een reeks \tilde{R} van ten hoogste k swaps met hetzelfde effect als R , zodat $S_{x,y}$ de eerste swap van \tilde{R} is en zodat positie y in geen enkele andere swap van \tilde{R} voorkomt.

Bewering III. Als $y \neq x$ en als we R uitvoeren na $S_{x,y}$, dan hebben we $k + 1$ swaps gedaan. Maar er bestaat een reeks \tilde{R} van ten hoogste $k - 1$ swaps met hetzelfde effect als deze reeks van $k + 1$ swaps.

Neem vanaf nu aan dat R een zo kort mogelijke reeks van swaps is die doet wat de opgave vereist. Aannemende dat deze beweringen waar zijn, tonen we aan dat we voor R net zo goed de eerder gevonden oplossing van 10 swaps kunnen nemen.

We begonnen met het opmerken dat het tweede blok met L op positie 10 al op zijn plaats stond. Neem derhalve voor x de beginpositie van het blok (met L) dat na R op positie 10 staat. Als $x = 10$, dan volgt uit Bewering I (met $y = 10$) dat R meer swaps bevat dan nodig is. Dus $x \neq 10$.

Het effect van $S_{x,10}$ op de beginsituatie van de blokken is dat twee blokken met L verwisseld worden, feitelijk niets dus. Uit Bewering III (met $y = 10$) volgt nu opnieuw dat R meer swaps bevat dan nodig is. Dus positie 10 komt in geen enkele swap van R voor. Het blok met L op positie 10 blijft daar dus staan tijdens R .

Vervolgens verwisselden we het blok met E op positie 5 met het blok met O op positie 11 in onze oplossing van 10 swaps. Laat p de beginpositie zijn van het blok (met O) dat na R op positie 5 staat en laat q de beginpositie zijn van het blok (met E) dat na R op positie 11 staat.

Neem eerst aan dat $p = 11$. Volgens Bewering II (met $x = p$ en $y = 5$) mogen we aannemen dat R begint met $S_{11,5}$. Na $S_{11,5}$ staat het blok met O op positie 5 en het blok met E op positie 11, zodat positie 5 en 11 al de juiste letters hebben. Net zoals het tweede blok met L blijft staan tijdens R , blijven ook de blokken op positie 5 en 11 staan in R na de eerste swap van R .

Neem vervolgens aan dat $p \neq 11$. Het geval $q = 5$ gaat net zo als het geval $p = 11$, dus neem aan dat $q \neq 5$. Volgens Bewering II (met $x = p$ en $y = 5$) mogen we aannemen dat $S_{p,5}$ de eerste swap van R is. Omdat $q \neq p$, $11 \neq p$ en $q \neq 5$, mogen we evenzo aannemen dat $S_{q,11}$ de tweede swap van R is. In de beginsituatie hebben de blokken op positie p en 11 allebei een O, en de blokken op positie q en 5 allebei een E. Voor de letters komt $S_{p,5}$ gevolgd door $S_{11,q}$ dus op hetzelfde neer als $S_{11,5}$ gevolgd door $S_{p,q}$. Dus we mogen opnieuw aannemen dat R begint met $S_{11,5}$. Net zoals het tweede blok met L blijft staan tijdens R , blijven ook de blokken op positie 5 en 11 staan in R na de eerste swap van R .

Neem voor R' de reeks bestaande uit de tweede tot en met de laatste swap van R . De eerste swap van R is $S_{11,5}$ en in R' komen positie 5, 10 en 11 niet voor.

Door hetzelfde argument als hierboven af te draaien voor R' in plaats van R , zien we dat we mogen aannemen dat R' begint met $S_{6,9}$, de tweede swap van onze oplossing van 10 swaps, $S_{6,9}$. Verder geldt dan dat positie 6 en 9 na de eerste swap van R' niet meer meedoen in R' .

Zo doorgaande zien we dat we mogen aannemen dat R begint met de eerste 3 swaps van onze oplossing en dat de posities van die eerste 3 swaps na de derde swap van R niet meer meedoen in R . Omdat dan de posities van de 7 nog te verplaatsen blokken die geen C bevatten al vast ligt, kunnen we vervolgens 7 maal Bewering II gebruiken voor het rechtvaardigen van de overige 7 swaps van onze reeks van 10 swaps. Dus 10 is het minimale aantal swaps.

Bewijs van Bewering I en Bewering II. Neem aan dat \tilde{R} een reeks van ten hoogste k swaps is met hetzelfde effect als R , bijvoorbeeld $\tilde{R} = R$. Veronderstel dat y, z, v en w verschillende posities zijn. Dan geldt het volgende.

$S_{y,z}$	na	$S_{v,w}$	heeft hetzelfde effect als	$S_{v,w}$	na	$S_{y,z}$
$S_{y,z}$	na	$S_{z,w}$	heeft hetzelfde effect als	$S_{z,w}$	na	$S_{y,w}$
$S_{y,z}$	na	$S_{y,w}$	heeft hetzelfde effect als	$S_{z,w}$	na	$S_{y,z}$
$S_{y,z}$	na	$S_{y,z}$	heeft geen effect			

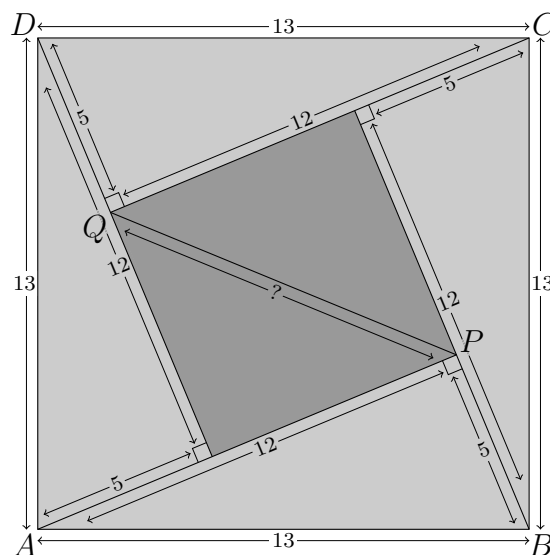
Dit geeft 4 trucjes die we op \tilde{R} kunnen toepassen, waarbij het laatste trucje het aantal swaps van \tilde{R} met 2 vermindert. Met de eerste 2 trucjes kunnen we in \tilde{R} de swaps, waarvan een van de posities y is, naar voren halen. Met de laatste 2 trucjes kunnen we in \tilde{R} het aantal swaps met y laten afnemen. We kunnen er zo voor zorgen dat positie y alleen in de eerste swap van \tilde{R} kan voorkomen. Als $y \neq x$ (Bewering II), dan moet de eerste swap wel $S_{x,y}$ zijn. Als $y = x$ (Bewering I), dan heeft \tilde{R} geen swap meer met y , waaruit we kunnen concluderen dat we het laatste trucje minimaal een keer hebben gebruikt.

Bewijs van Bewering III. Volgens Bewering II kunnen we een reeks swaps \tilde{R} van lengte k vinden die begint met $S_{x,y}$. Dan kan $S_{x,y}$ gevolgd door \tilde{R} ook met $k - 1$ swaps, want $S_{x,y}$ na $S_{x,y}$ heeft geen effect.

15

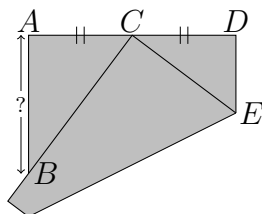
Voor een rechthoekige driehoek geldt, dat de som van de twee spitse hoeken gelijk aan 90 graden is. Derhalve kunnen we vier rechthoekige driehoeken in vierkant $ABCD$ tekenen, waarvan de zijden deels samenvallen, en wel als volgt.

De vier rechthoekige driehoeken sluiten een vierkant in met zijde $12 - 5 = 7$. Het lijnstuk PQ is een diagonaal van dat vierkant, en heeft dus lengte $7\sqrt{2}$.



16

Noem het midden van de achterste zijde van het vierkant C en de hoek rechtsachter D . Kies voor E het eindpunt van de vouwlijn op de rechterzijde van het vierkant.



We weten dat lijnstuk AC en lijnstuk CD allebei 15 centimeter zijn. We weten ook dat lijnstuk CE en lijnstuk ED samen 30 centimeter zijn. Vanaf nu melden we niet meer dat lengtes in centimeters worden uitgedrukt.

Noem de lengte van lijnstuk DE x . Dan is de lengte van lijnstuk CE enerzijds gelijk aan $30 - x$, maar volgens de stelling van Pythagoras ook gelijk aan $\sqrt{x^2 + 15^2}$. Dus

$$x^2 + 15^2 = (30 - x)^2 = 4 \cdot 15^2 - 4 \cdot 15x + x^2$$

Hieruit volgt dat $4 \cdot 15x = 3 \cdot 15^2$, dus $x = \frac{3}{4} \cdot 15$.

Omdat driehoek ABC een rechte hoek te A heeft, zijn hoek CBA en hoek ACB samen 90 graden. Hoek ACB en hoek ECD zijn samen ook 90 graden. Derhalve zijn driehoek ABC en driehoek DCE gelijkvormig.

Noem de lengte van lijnstuk AB y . Vanwege bovenstaande gelijkvormigheid is

$$\frac{y}{15} = \frac{15}{x} = \frac{15}{\frac{3}{4} \cdot 15} = \frac{4}{3}$$

Dus $y = \frac{4}{3} \cdot 15 = 20$, en dat is ook het antwoord.

Overigens was de tekening bij de opgave stiekem toch op schaal getekend.

17

Laat $\frac{a}{b}$ de breuk zijn die je na het wegstrepen overhoudt, en x het weggestreepte cijfer. Omdat $\frac{a}{b} < 1$, is

$$0 < a < b$$

Verder is $x > 0$. Er zijn nu vier mogelijkheden.

$$\frac{\cancel{x}a}{\cancel{x}b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a\cancel{x}}{b\cancel{x}} = \frac{a}{b} \qquad \frac{\cancel{x}a}{b\cancel{x}} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}b} = \frac{a}{b}$$

wat neerkomt op

$$\frac{10 \cdot x + a}{10 \cdot x + b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{10 \cdot a + x}{10 \cdot b + x} = \frac{a}{b} \qquad \frac{10 \cdot x + a}{10 \cdot b + x} = \frac{a}{b} \qquad \frac{10 \cdot a + x}{10 \cdot x + b} = \frac{a}{b}$$

We behandelen alle vier mogelijkheden afzonderlijk.

Geval 1. $\frac{10 \cdot x + a}{10 \cdot x + b} = \frac{a}{b}$

Dan is $10 \cdot x \cdot b + a \cdot b = 10 \cdot x \cdot a + b \cdot a$, dus $10 \cdot x \cdot b = 10 \cdot x \cdot a$. Uit $x > 0$ volgt nu dat $a = b$. Maar $a < b$, dus dit geval levert geen oplossingen.

Geval 2. $\frac{10 \cdot a + x}{10 \cdot b + x} = \frac{a}{b}$

Dan is $10 \cdot a \cdot b + x \cdot b = 10 \cdot b \cdot a + x \cdot a$, dus $x \cdot b = x \cdot a$. Nu kunnen we net zoals bij het vorige geval afleiden dat dit geval ook geen oplossingen levert.

Geval 3. $\frac{10 \cdot x + a}{10 \cdot b + x} = \frac{a}{b}$

Dan is $10 \cdot x \cdot b + a \cdot b = 10 \cdot b \cdot a + x \cdot a$, dus

$$a \cdot (b - x) = 10 \cdot b \cdot (a - x) \quad (*)$$

Is $a - x = 0$, dan is ook $b - x = 0$, en dus $a = b$. Maar $a < b$. Dus $|a - x| \geq 1$. Verder is $|b - x| < 10$. Uit $0 < a < b$ volgt nu dat

$$\frac{b - x}{a - x} \leq \frac{|b - x|}{|a - x|} < 10 < 10 \cdot \frac{b}{a}$$

Dit laat zich echter niet rijmen met (*). Dus dit geval levert ook geen oplossingen.

Geval 4. $\frac{10 \cdot a + x}{10 \cdot x + b} = \frac{a}{b}$

Dan is $10 \cdot a \cdot b + x \cdot b = 10 \cdot x \cdot a + b \cdot a$, dus

$$10 \cdot a \cdot (b - x) = b \cdot (a - x) \quad (**)$$

Is $b - x = 0$, dan is ook $a - x = 0$, en dus $a = b$. Maar $a < b$. Als $b - x > 0$, dan volgt uit $a < b$ dat

$$\frac{a - x}{b - x} < \frac{b - x}{b - x} = 1 < \frac{10a}{b}$$

Dit laat zich echter niet rijmen met (**), dus $b - x < 0$. Er geldt dus dat

$$0 < a < b < x$$

We kunnen (**) herschrijven tot

$$2 \cdot a \cdot (x - b) = \frac{b \cdot (x - a)}{5} \quad (***)$$

Blijkbaar is $b(x - a)$ deelbaar door 5, zodat

$$b = 5 \quad \text{of} \quad x - a = 5$$

We gaan nu opnieuw mogelijkheden apart bekijken, dit keer twee mogelijkheden.

Geval 4.1. $b = 5$.

Dan laat (**) zich via (***) herschrijven tot $2 \cdot a \cdot (x - 5) = (x - a)$, oftewel $(2a - 1)x = 10a - a$.

Dus

$$x = \frac{9a}{2a - 1}$$

Omdat $a < b = 5$, kan a alleen 1, 2, 3 of 4 zijn. Voor $a = 1$ vind je $x = 9$, voor $a = 2$ vind je $x = 6$, en voor $a = 3$ en $a = 4$ is x niet geheel. Inderdaad is

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5} \quad \text{en} \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

Geval 4.2. $x - a = 5$.

Dan laat (**) zich via (***) herschrijven tot $2 \cdot a \cdot (x - b) = b$, oftewel $2ax = 2ab + b$. Dus

$$b = \frac{2ax}{2a + 1}$$

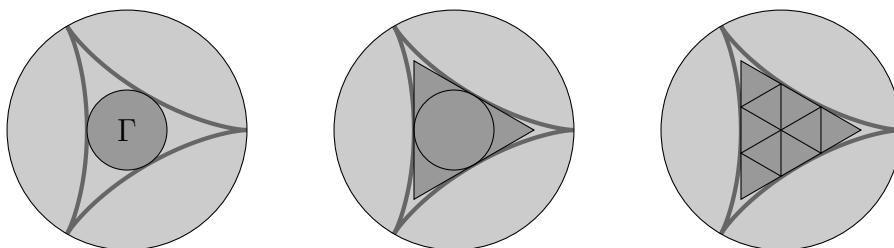
Omdat $a + 5 = x \leq 9$, kan a wederom alleen 1, 2, 3 of 4 zijn. Voor $a = 1$ vind je $x = 6$ en $b = 4$, voor $a = 4$ vind je $x = 9$ en $b = 8$, en voor $a = 2$ en $a = 3$ is b niet geheel. Inderdaad is

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \quad \text{en} \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}$$

Dus er zijn vier oplossingen, en de ontbrekende vierde oplossing is $\frac{26}{65}$.

18

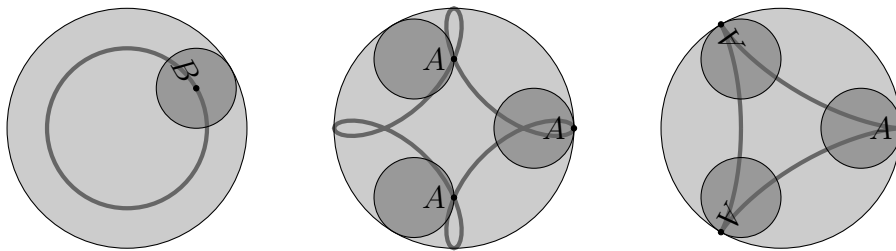
De afstand tussen punt A en de rand van de grote cirkel bedraagt nooit meer dan 2. Derhalve is de afstand tussen punt A en het midden van de grote cirkel telkens tenminste 1. We kunnen dus een cirkel Γ met straal 1 binnen de deltoïde plaatsen, namelijk een met hetzelfde middelpunt als de grote cirkel.



Cirkel Γ lijkt de grootst mogelijke cirkel binnen de deltoïde. Voor een gelijkzijdige driehoek Δ binnen de deltoïde geldt, dat de ingeschreven cirkel van Δ ook binnen de deltoïde ligt. Dus als Γ inderdaad de grootst mogelijke cirkel binnen de deltoïde is, is de straal van de ingeschreven cirkel van Δ ten hoogste 1.

Het lijkt erop dat we Δ zo kunnen kiezen, dat Γ de ingeschreven cirkel is van Δ en dat Δ een verticale zijde heeft. In dat geval kunnen we Δ onderverdelen in 9 driehoekjes met een horizontale hoogtelijn van lengte 1 en een verticale zijde van lengte $2 \tan 30 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. De oppervlakte van zo'n driehoekje is $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dus de oppervlakte van Δ is $3\sqrt{3}$.

Voor de geïnteresseerde lezer. Maar is Γ wel de grootst mogelijke cirkel binnen de deltoïde? En is er wel een driehoek met Γ als ingeschreven cirkel die binnen de deltoïde ligt? Om die vragen te kunnen beantwoorden, moeten we meer van de deltoïde te weten komen. We doen dit door middel van het afleiden van een parameterisering van de deltoïde. Het middelpunt B van de kleine cirkel beschrijft een cirkel met straal 2 om het middelpunt van de grote cirkel. Daarnaast wordt de positie van punt A bepaald door het draaien van de kleine cirkel om zijn middelpunt B . De omtrek van de kleine cirkel is driemaal zo klein als de omtrek van de grote cirkel. Draait de kleine cirkel dan ook driemaal zo hard om B als dat B draait om het middelpunt van de grote cirkel?



Nee, want dan zou punt A een hele omloop maken tijdens een derde omloop van punt B . Maar op die manier is A na een derde omloop van B niet op de rand van de grote cirkel. A is daar dan al terug geweest. De kromming van de grote cirkel heeft dus invloed op hoe snel de kleine cirkel om B draait, en zorgt ervoor dat punt A slechts twee omlopen maakt in de tijd dat punt B er een maakt.

De omlopen van A zijn in tegengestelde richting van die van B , dus een mogelijke parameterisering is

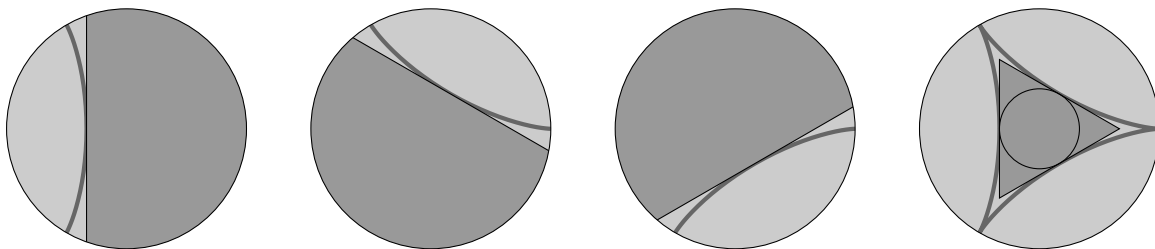
$$2 \cdot (\cos(t), \sin(t)) + 1 \cdot (\cos(-2t), \sin(-2t)) = (2 \cos(t) + \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t))$$

We kunnen de parameter t zien als een tijdsparameter en bovenstaande formule als de positie van punt A op dat tijdstip. Merk op dat onze parameterisering periodiek is in t met periode 360. Wat we inmiddels ook weten, is dat de deltoïde een draaisymmetrie van 120 graden heeft. Dit gaan we ook gebruiken.

Als $120 \leq t \leq 240$, is $-1 \leq \cos(t) \leq 0$, en dus is dan $\cos(t) \leq -(\cos(t))^2$. Derhalve is

$$\begin{aligned} 2 \cos(t) + \cos(2t) &= 2 \cos(t) + (2(\cos(t))^2 - 1) \\ &= 2(\cos(t) + (\cos(t))^2) - 1 \leq -1 \end{aligned}$$

wanneer $120 \leq t \leq 240$. Dus als $120 \leq t \leq 240$, dan is de eerste coördinaat van punt A is niet groter dan -1 .



Vanwege de draaisymmetrie kunnen we soortgelijke gebieden vinden waar A niet komt als $0 \leq t \leq 120$ en als $240 \leq t \leq 360$. De doorsnede van deze gebieden is precies het inwendige van een gelijkzijdige driehoek, waarvan Γ de ingeschreven cirkel is. Dus we kunnen Δ inderdaad zo kiezen dat Γ de ingeschreven cirkel is van Δ .

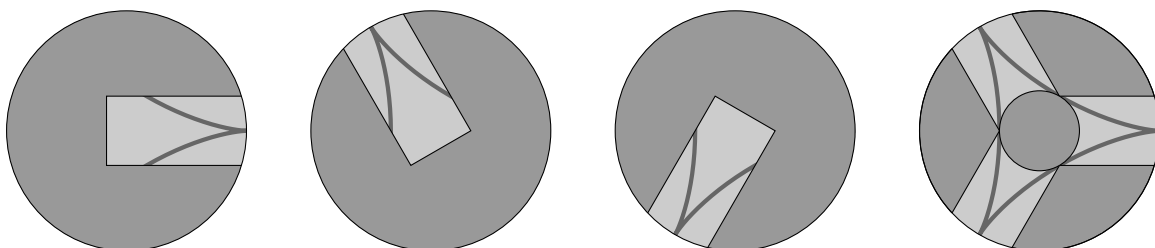
Als $-60 \leq t \leq 60$, is $\cos(t) \geq \frac{1}{2}$ en $|\sin(t)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Derhalve is

$$2\cos(t) + \cos(2t) \leq \frac{1}{2} + -1 = -\frac{1}{2}$$

en

$$\begin{aligned} |2\sin(t) + \sin(2t)| &= |2\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t)| \\ &= 2 \cdot |\sin(t)| \cdot |1 + \cos(t)| \\ &\leq 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

wanneer $-60 \leq t \leq 60$. Dus als $-60 \leq t \leq 60$, dan is de eerste coördinaat van punt A niet kleiner dan $-\frac{1}{2}$ en de absolute waarde van de tweede coördinaat van punt A niet groter dan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.



Vanwege de draaisymmetrie kunnen we soortgelijke gebieden vinden waar A niet komt als $60 \leq t \leq 180$ en als $180 \leq t \leq 240$. De doorsnede van deze gebieden bestaat uit drie deelgebieden, zodat er voor elk punt binnen de grote cirkel een deelgebied bestaat, waarvoor geldt dat de afstand tussen punt en deelgebied ten hoogste 1 is. Hieruit volgt dat Γ inderdaad de grootst mogelijke cirkel binnen de deltoïde is.

6								6
5								5
4								4
3								3
2								2
1								1
0	S	F						0
	0	1	2	3	4	5	6	7

zuid

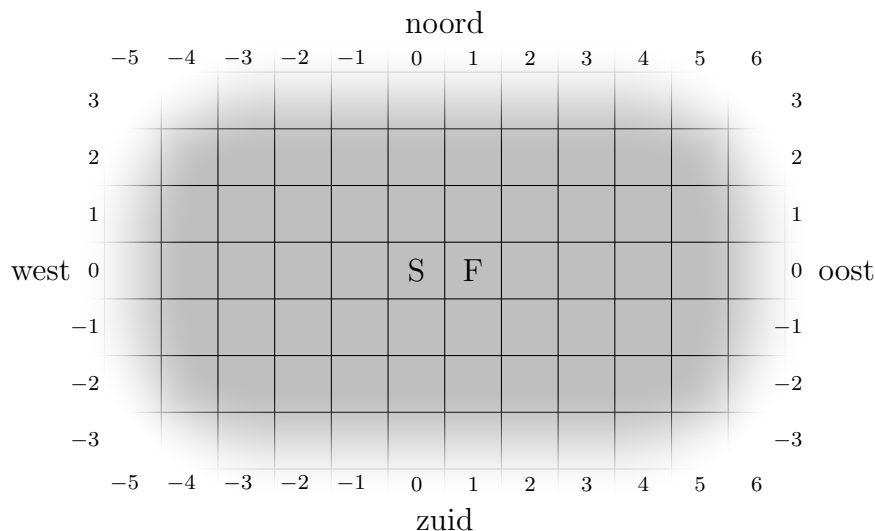
Nummer de kolommen van west naar oost met de nummers 0 tot en met 7. De pion komt eerst in kolom 0, 3 en 6 (in die volgorde), dan in kolom 1, 4 en 7 (in die volgorde), vervolgens in kolom 2 en 5 (in die volgorde), om daarna weer van vooraf aan te beginnen. Dus in 8 achtereenvolgende beurten door Kris komt elke kolom een keer aan de beurt als bestemming van de pion, en na 8 achtereenvolgende beurten door Kris herhaalt de kolom van de pion zich. Kolom 1, de kolom van eindbestemming F, is dus de bestemming in de 3de, 11de, 19de, 27ste, ... beurt door Kris.

Net zo is de hoogte van dit bord op zodanige wijze gekozen, dat Kras ook op precies één manier een zet kan doen wanneer hij aan de beurt is. Kras moet immers de pion 2 vakjes naar het noorden zetten als deze in de 7 meest zuidelijke rijen staat, en 7 vakjes naar het zuiden als deze in de 2 meest noordelijke rijen staat. Doordat de zet van Kras ook uniek bepaald is, kunnen we gemakkelijk bijhouden in welke rij de pion is.

Nummer de rijen van zuid naar noord met de nummers 0 tot en met 8. De pion komt eerst in rij 0, 2, 4, 6 en 8 (in die volgorde), dan in rij 1, 3, 5 en 7 (in die volgorde), om daarna weer van vooraf aan te beginnen. Dus in 9 achtereenvolgende zetten door Kras komt elke rij een keer aan de beurt als bestemming van de pion, en na 9 achtereenvolgende zetten door Kras herhaalt de rij van de pion zich. Rij 1, de rij van eindbestemming F, is dus de bestemming in de 9de, 18de, 27ste, 36ste, ... beurt door Kras.

Na 27 beurten door zowel Kris als Kras staat de pion dus op F, in totaal dus na 54 beurten. Maar na 19 beurten door Kris en 18 beurten door Kras staat de pion ook al op F, en dat is na 37 beurten. Dat is ook het minimum aantal beurten, tenzij het op een oneindig speelbord sneller kan.

Veronderstel derhalve dat de pion na t beurten op een oneindig speelveld op F staat. Kris kiest telkens uit twee mogelijkheden. We kunnen echter de volgorde waarin hij deze mogelijkheden kiest veranderen, want dit heeft geen effect op de uiteindelijke positie na t beurten. We kunnen dit op zodanige wijze doen, dat de pion in de kolomrange van het hierboven getekende eindige speelbord blijft. Net zo kunnen we de volgorde waarin Kras uit zijn twee mogelijkheden kiest veranderen, zodat de pion in de rijrange van het hierboven getekende eindige speelbord blijft. Dus $t \geq 37$.



Oplossing 2. Neem aan dat de pion na t beurten op het vakje met de letter F staat. Laat a het aantal beurten van Kras zijn op dat moment, en i het aantal beurten van Kris zijn op dat moment. Dan is $t = i + a$. Nummer de rijen en kolommen zoals in bovenstaande figuur is aangegeven.

Als Kras b zetten naar het noorden (elk van lengte 2) en c zetten naar het zuiden (elk van lengte 7) heeft gedaan, dan staat de pion op rij nummer $2b - 7c$. Na a beurten door Kras geldt dus dat $2b - 7c = 0$. Hieruit volgt dat $b = 7n$ en $c = 2n$ voor een zeker natuurlijk getal n . Er is dus een natuurlijk getal n , zo dat

$$a = b + c = 7n + 2n = 9n$$

Als Kris j zetten naar het oosten (elk van lengte 3) en k zetten naar het westen (elk van lengte 5) heeft gedaan, dan staat de pion op kolom nummer $3j - 5k$. Na i beurten door Kris geldt dus dat $3j - 5k = 1$. Tevens geldt dat Kris op F staat als hij 2 zetten naar het oosten en een zet naar het westen doet vanaf S, oftewel $3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1$. Trekken we deze laatste gelijkheid af van $3j - 5k = 1$, dan krijgen we $3(j - 2) - 5(k - 1) = 0$. Hieruit volgt dat $j - 2 = 5m$ en $k - 1 = 3m$ voor een zeker natuurlijk getal m . Er is dus een natuurlijk getal m , zo dat

$$i = j + k = (j - 2) + (k - 1) + 3 = 5m + 3m + 3 = 8m + 3$$

Is t even, dan is $a = i$. Is t oneven, dan is $a = i - 1$, want Kris is het eerste aan de beurt. We behandelen beide gevallen afzonderlijk.

Geval 1. $a = i$.

Dan $8m + 3 = i = a = 9n$. De kleinste m waarvoor $8m + 3$ een 9-voud is, is $m = 3$. i is dan gelijk aan 27, zodat $t = i + a = 27 + 27 = 54$.

Geval 2. $a = i - 1$.

Dan $8m + 2 = i - 1 = a = 9n$. De kleinste m waarvoor $8m + 2$ een 9-voud is, is $m = 2$. $i - 1$ is dan gelijk aan 18, zodat $t = i + a = 19 + 18 = 37$.

Het antwoord is dus 37.