

---

---

**WISKUNDE-ESTAFETTE 2015**

**60 Minuten voor 20 opgaven.**

**Het totaal aantal te behalen punten is 500**

---

---

**1** (20 punten)

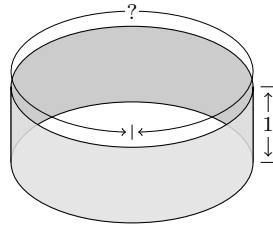
Gegeven zijn drie verschillende gehele getallen  $a$ ,  $b$  en  $c$ , die elk groter dan 0 en kleiner dan 6 zijn. Verder geldt het volgende:

- De som van  $b$  en  $c$  is deelbaar door 3;
- De som van  $a$  en  $c$  is deelbaar door 4.

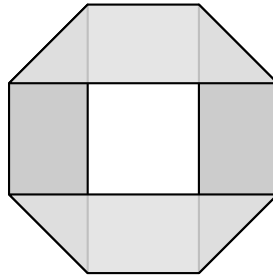
*Wat zijn de mogelijke waarden van  $a$ ?*

**2** (20 punten)

Een cilindervormige papieren ring heeft breedte 1.



Drukken we deze ring op de juiste manier plat op tafel, dan krijgen we een figuur waarvan de buitenkant een regelmatige achthoek is.

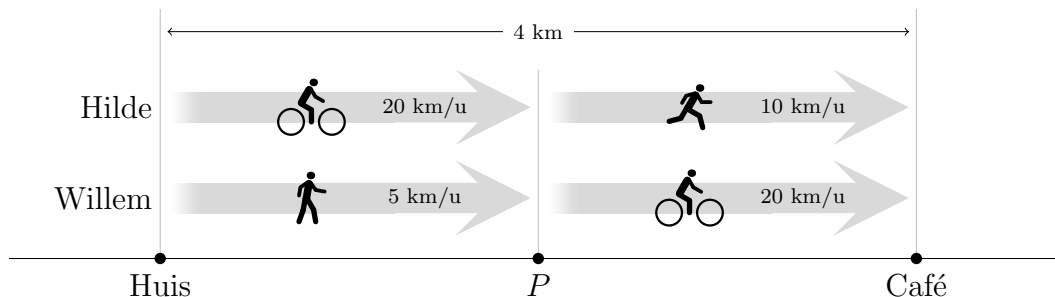


*Wat is de omtrek van de papieren ring?*

**3** (30 punten)

Hilde en Willem gaan van hun huis naar een café dat 4 kilometer verderop ligt. Hilde houdt van hardlopen, maar Willem houdt meer van wandelen. Om niet te lang over de reis naar het café te doen, besluiten ze de fiets te nemen. De fiets van Willem heeft helaas een lekke band. Ze doen nu het volgende.

Hilde rijdt met haar fiets naar een bepaald punt  $P$  op de route naar het café, met een snelheid van 20 km/u. Vervolgens stapt ze af en gaat ze hardlopend verder naar het café met een snelheid van 10 km/u.






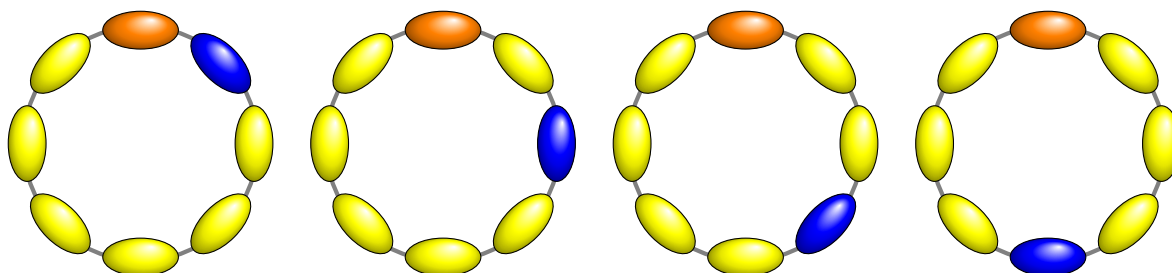
In de tussentijd wandelt Willem naar punt  $P$  met een snelheid van 5 km/u, waar hij de fiets van Hilde pakt en verder fietst naar het café met een snelheid van 20 km/u.

Hilde en Willem kiezen punt  $P$  zó, dat ze precies even lang over de reis van 4 kilometer doen (dat is anders dan hierboven aangegeven). Ze ondervinden geen verkeershinder tijdens hun reis. Verder verwaarlozen we de tijd die nodig is voor het opstappen op en afstappen van de fiets.

*Hoeveel **minuten** duurt de reis naar het café?*

**4** (20 punten)

We maken een armband van 8 kralen, in de kleuren oranje , geel  en blauw . Met 1 oranje kraal, 1 blauwe kraal en 6 gele kralen zijn 4 kleurcombinaties mogelijk: er zitten 0, 1, 2 of 3 gele kralen tussen de oranje en de blauwe kraal, zie hieronder.



*Hoeveel kleurcombinaties zijn er mogelijk met 1 oranje kraal, 2 blauwe kralen en 5 gele kralen?*



**5** (30 punten)

Pietje en Marietje maken elk een rechthoekige legpuzzel, die bestaat uit vierkante puzzelstukjes.

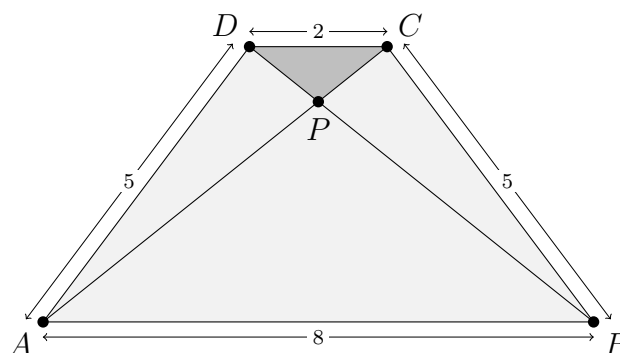


Ze beginnen met de rand. Als Pietje de rand af heeft, heeft hij precies de helft van de stukjes gebruikt (is hierboven niet zo). Voor Marietje geldt dit ook. Toch heeft haar puzzel een ander aantal stukjes dan die van Pietje.

*Hoeveel stukjes hebben de twee puzzels samen?*

**6** (20 punten)

De lengtes van de vier zijden van vierhoek  $ABCD$  zijn aangeduid in onderstaande figuur. Vierhoek  $ABCD$  is bovendien een trapezium, want zijde  $AB$  is parallel met zijde  $CD$ .



De diagonalen  $AC$  en  $BD$  snijden elkaar in het punt  $P$ .

*Wat is de oppervlakte van driehoek  $CDP$ ?*

**7** (30 punten)

Van twee getallen van twee cijfers (dus uit  $10, 11, 12, \dots, 99$ ) weten we het volgende.

- Minstens een van de getallen is een kwadraat;
- Minstens een van de getallen is een veelvoud van 13;
- De som van de cijfers van minstens een van de getallen is 7;
- De som van de twee getallen is deelbaar door 9.

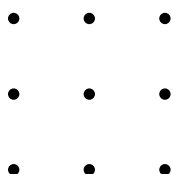
Op basis van deze gegevens ligt precies een van die twee getallen vast.

*Geef dat getal.*

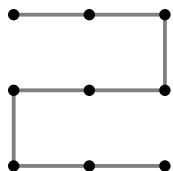
[De tafel van 13 is 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130.]

8 (20 punten)

Gegeven is een rooster van  $3 \times 3$  punten.



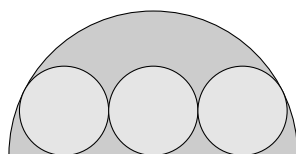
Door boven elkaar gelegen en naast elkaar gelegen punten met elkaar te verbinden, kunnen we een aaneengesloten pad maken dat elk punt precies eenmaal aandoet, al dan niet als een van de twee eindpunten.



*Hoeveel van zulke paden zijn er mogelijk?*

9 (30 punten)

Drie kleine cirkels met straal 1 raken aan elkaar en aan de rand van een grote halve cirkelschijf, zoals is aangegeven in onderstaande figuur. (Er zijn in totaal 7 raakpunten.)

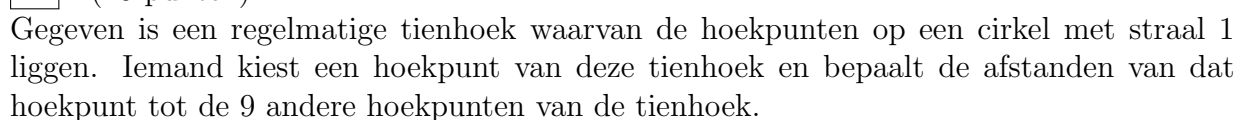


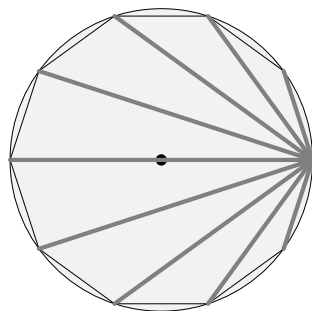
*Wat is de straal van de grote halve cirkel?*

10 (20 punten)

Gegeven zijn 15 dominostenen, zoals hieronder is aangegeven. Zoals je ziet is elke dominosteen verdeeld in twee vierkante helften met zwarte kuiltjes. De vierkante helften noemen we *halve dominostenen* en de zwarte kuiltjes noemen we *ogen*.







Wat is de som van de **kwadraten** van die 9 afstanden?

13 (30 punten)

We beginnen met de vier cijfers  $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$ . Tijdens een *stap* hogen we een van de vier cijfers eentje op. In 8 achtereenvolgende stappen kunnen we dan de cijfercombinatie  $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{5}$  maken.

Op hoeveel manieren kunnen we de volgorde van deze 8 stappen kiezen, zodat bovendien het derde cijfer nooit hoger is dan het vierde cijfer?

[Voorbeeld:  $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$  mag niet (na 2 van de 8 stappen).]

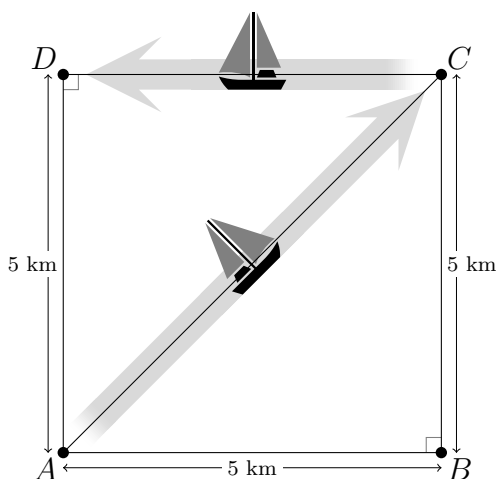
14 (20 punten)

Geert heeft vier positieve gehele getallen gekozen. Hij telt elk tweetal uit die vier getallen op. De uitkomsten van die zes optellingen zijn 8, 10, 14, 16, 20 en 22.

Wat is het verschil tussen het grootste en het kleinste van die vier getallen?

15 (30 punten)

Vierkant  $ABCD$  ligt op open water en heeft een zijde van 5 kilometer. Twee koningskinderen zitten elk op een boot. Doordat het stormt, kunnen ze niet naar elkaar toezwemmen.



De boot van een van de koningskinderen vaart met constante snelheid van  $A$  naar  $C$ . Tegelijkertijd vaart de boot van het andere koningskind met constante snelheid van  $C$  naar  $D$ . Dus beide boten vertrekken op hetzelfde moment en komen ook op hetzelfde tijdstip aan.

Hoeveel kilometer is de kleinste onderlinge afstand tussen de koningskinderen tijdens deze vaartochten?

**16** (20 punten)

Van een positief geheel getal  $a$  van 9 cijfers, zeg

$$a = c_1 c_2 c_3 \cdots c_9$$

waarbij  $c_i$  dus het  $i$ -de cijfer van  $a$  is voor alle  $i$ , weten we dat

$$c_1 = 1$$

$$c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_8$$

$$c_8 < c_9$$

Wat is de grootste mogelijke som van de cijfers van  $9 \times a$ ?

**17** (30 punten)

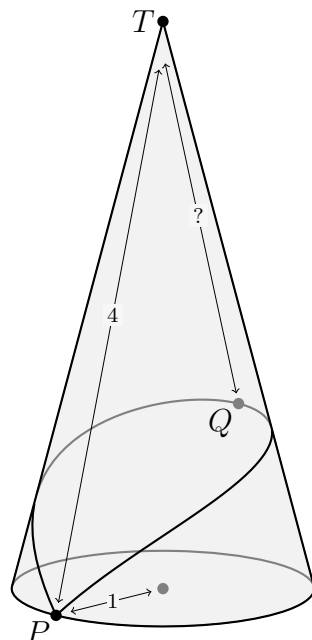
Bekijk de getallen van drie cijfers, waarvan alleen het middelste cijfer 0 is. Drie van die getallen zijn deelbaar door het getal (van twee cijfers) dat je krijgt door de nul van het getal zelf weg te laten.

Wat is de **som** van die drie getallen?

[307 is *niet* een van die drie getallen, want 37 is geen deler van 307.]

**18** (20 punten)

Gegeven is een kegel met top  $T$ . De afstand van  $T$  tot een punt  $P$  op de grondcirkel is 4. De straal van de grondcirkel is 1.



Aan punt  $P$  maken we een elastiekje vast. Vervolgens trekken we de andere kant van het elastiekje over de top van de kegel, zodat het strak om de kegel komt te liggen, met een knikpunt te  $P$ .

Er is geen wrijving tussen het elastiek en de kegel. Noem het punt van de elastiek dat het dichtst bij  $T$  ligt  $Q$ .

*Wat is de afstand tussen  $T$  en  $Q$ ?*

**19** (30 punten)

Er zijn twee positieve gehele getallen  $a$  en  $b$ , zo dat

$$b^3 - a^3 = 2015$$

*Wat is de **som** van  $a$  en  $b$ ?*

**20** (30 punten)

De leerlingen in de klas van juffrouw Janssen hebben hoedjes op in 5 kleuren van de regenboog: elk hoedje is rood, oranje, geel, groen of blauw. Juffrouw Janssen, die geen hoedje op heeft, ziet dat in haar klas Anja, Bram, Cora, Dirk en Eric alle 5 een hoedje van een andere kleur op hebben.



De leerlingen zien hun eigen hoedje niet, maar elkaars hoedjes wel.

- Anja ziet evenveel rode als oranje hoedjes;
- Bram ziet evenveel oranje als gele hoedjes;
- Cora ziet evenveel gele als groene hoedjes;
- Dirk ziet evenveel groene als blauwe hoedjes;
- Eric ziet evenveel blauwe als rode hoedjes.

Bovendien is het totaal aantal blauwe en rode hoedjes dat Eric ziet even groot als het totaal aantal groene, gele en oranje hoedjes dat hij ziet.

Veder is gegeven dat het aantal leerlingen in de klas van juffrouw Janssen een tweecijferig getal is, waarvoor geldt dat de som van beide cijfers *geen* viervoud is.

*Wat is dit aantal leerlingen?*