

Tipping points, zo werken ze!

Wat een in ijs gehulde aarde, de Sahara en
armoede met elkaar gemeen hebben

dr. Sebastian Bathiany, Bregje van der Bolt MSc, dr. Ingrid van de Leemput,
Usman Mirza MSc, Pablo Rodríguez-Sánchez MSc, Arie Staal MSc
(Wageningen Universiteit)

drs. Rob Adriaens (KNAG & CSG Het Streek)

drs. Bjinse Dankert, dr. Anneke van de Boer (NESSC / Universiteit Utrecht)



- © Deze module is eigendom van het Koninklijk Nederlands Aardrijkskundig Genootschap (KNAG) en het Nederlands Earth System Science Centre.
Gebruik van deze module is toegestaan aan scholen of instellingen onder vermelding van de auteurs en de hieronder weergegeven instellingen.

Tekening voorkant gemaakt door Bregje van der Bolt.



Tipping points, zo werken ze!

Wat een in ijs gehulde aarde, de Sahara en
armoede met elkaar gemeen hebben

Deze module is gecertificeerd door het Koninklijk
Nederlands Aardrijkskundig Genootschap (KNAG). De
module maakt onderdeel uit van Geo Future School.

Sebastian Bathiany, Bregje van der Bolt, Ingrid van
de Leemput, Usman Mirza, Pablo Rodríguez-
Sánchez, Arie Staal (Wageningen Universiteit)
Rob Adriaens, Bjinse Dankert, Anneke van de Boer
(NESSC). Contact: info@nessc.nl
@2018



Geo Future School

Geo Future School is een onderwijsstroom die toekomstgericht onderwijs biedt op het raakvlak van bèta en gamma. Centraal binnen Geo Future School staan de grote vraagstukken van de 21e eeuw rondom thema's als energie, water, voedsel, veiligheid, verstedelijking, klimaat, gezondheid, duurzaamheid en globalisering. Geo-informatie en geodesign worden gebruikt om oplossingen te formuleren voor deze vraagstukken die de hele aarde aangaan.

Binnen de onderwijsstroom nemen de Geo Future School modules een belangrijke plaats in. Deze modules bestaan uit lessenseries van circa 8 tot 14 lessen rondom een thema. Elke module bevat vijf vaste onderdelen. Het begint met een startopdracht die zich dicht bij de beleavingswereld van jongeren afspeelt. Er is een deel theorie dat wordt afgewisseld met go/no go opdrachten en een praktisch onderdeel, zoals een veldwerk, een onderzoek of een ontwerpdracht. Centraal in de module staat de eindopdracht waarin leerlingen hun eigen creativiteit ten volle kunnen inzetten. De module wordt afgesloten met een presentatie van de eindopdracht.

Er is een opbouw in denkvaardigheden. In de startopdracht gaat het vooral om het activeren van voorkennis, in de theorie ligt de nadruk op begrijpen en toepassen, bij het praktische onderdeel op analyseren en evalueren en in de eindopdracht ligt de nadruk op creëren.

De modules worden gemaakt door docenten uit het voortgezet onderwijs in samenwerking met een bedrijf of instelling. Het gaat dus om levensechte en actuele vraagstukken. De leerlingen kunnen een groot deel van de tijd in hun eigen tempo werken en in de eindopdracht kunnen ze hun eigen accenten leggen.

Geo Future School brengt bedrijven, instellingen en onderwijs samen. Het maakt onderwijs relevant, praktijkgericht, uitdagend en vooral toekomstgericht.

Inhoudsopgave

Inleiding	5
Curriculum	7
Afsluitende opdracht I.....	8
De opbouw van de module.....	9
Startopdracht.....	10
Hoofdstuk 1: Tipping points in je vijver	11
Hoofdstuk 2: Theorie achter tipping points	16
Hoofdstuk 3: De aarde als sneeuwbal	22
Hoofdstuk 4: De groene Sahara	26
Hoofdstuk 5: Armoedevallen	31
Afsluitende opdracht II.....	36
Beoordeling	37

Inleiding

Ons klimaat verandert, maar dat is over het algemeen nauwelijks merkbaar voor ons. Als je jarenlang naar dezelfde plek op vakantie gaat, zal je misschien wel zien dat er wat kleine dingen in de omgeving zijn veranderd, maar het klimaat zelf verandert zó langzaam en geleidelijk dat dat je niet opvalt. In de beleving van veel mensen is onze omgeving dan ook redelijk voorspelbaar en constant. Dat is ook lange tijd het heersende beeld geweest in de klimaatwetenschappen: stijgende CO₂ concentraties zouden een geleidelijk effect hebben op het klimaat. De laatste jaren spreekt men echter steeds vaker over mogelijke kantelpunten of *tipping points* in het klimaat. Wat bedoelt men precies met zo'n tipping point? In hoofdstuk 1 en 2 kun je hierover lezen.

Als je kijkt naar het klimaat in het verleden, dan zie je dat op sommige momenten het klimaat niet geleidelijk, maar juist abrupt veranderde. Sterker nog, het relatief constante klimaat van de laatste 10.000 jaar is eerder uitzondering dan regel. Het klimaat varieerde vóór die tijd sterk en af en toe ook abrupt. 34 miljoen jaar geleden bijvoorbeeld koelde het klimaat plotseling af en ontstond de ijskap op de Zuidpool, terwijl het daar toen eigenlijk veel te warm voor was. In de periode daarvoor groeiden er zelfs palmbomen op de Zuidpool! In hoofdstuk 3 lees je hoe deze abrupte veranderingen plaats konden vinden.

Het ontstaan van ijskappen is een wereldwijde verandering geweest, maar je ziet ook op kleinere schaal plotselinge veranderingen. Een voorbeeld hiervan is een verandering die 5000 jaar geleden plaatsvond in Noord-Afrika. Een landschap dat gekenmerkt werd door savanne en kleine meertjes waar nijlpaarden leefden, veranderde in de woestijn die wij nu kennen: de Sahara. Deze verandering wordt beschreven in hoofdstuk 4.

Plotselinge veranderingen vinden niet alleen in het klimaat plaats. Ook in andere systemen kunnen plotselinge veranderingen optreden: een bank gaat failliet, een persoon wordt depressief, of een koraalrif verdwijnt. Ook bij armoede kan een punt van plotselinge verandering optreden. Onder een bepaalde grens van bezittingen is het vrijwel onmogelijk om uit de armoede te komen. Zodra je echter iets boven die grens komt, kun je zelf een inkomen genereren en ontsnappen aan de 'armoedeval'. In 2006 kreeg professor Muhammed Yunus uit Bangladesh de Nobelprijs voor de Vrede omdat hij had bedacht arme mensen een klein bedrag, een zogenaamd microkrediet, te geven. Daarmee konden zij hun schulden aflossen of een eigen bedrijfje beginnen en zo uit de armoede ontsnappen. De afgelopen jaren heeft onze Koningin Maxima zich ook voor microkredieten ingezet. Niet alleen voor arme mensen in ontwikkelingslanden, maar ook voor microfinanciering in Nederland. In hoofdstuk 5 leer je waarom zo'n microkrediet kan helpen om aan armoede te ontsnappen.

In al deze voorbeelden verandert een systeem plotseling, zonder duidelijke

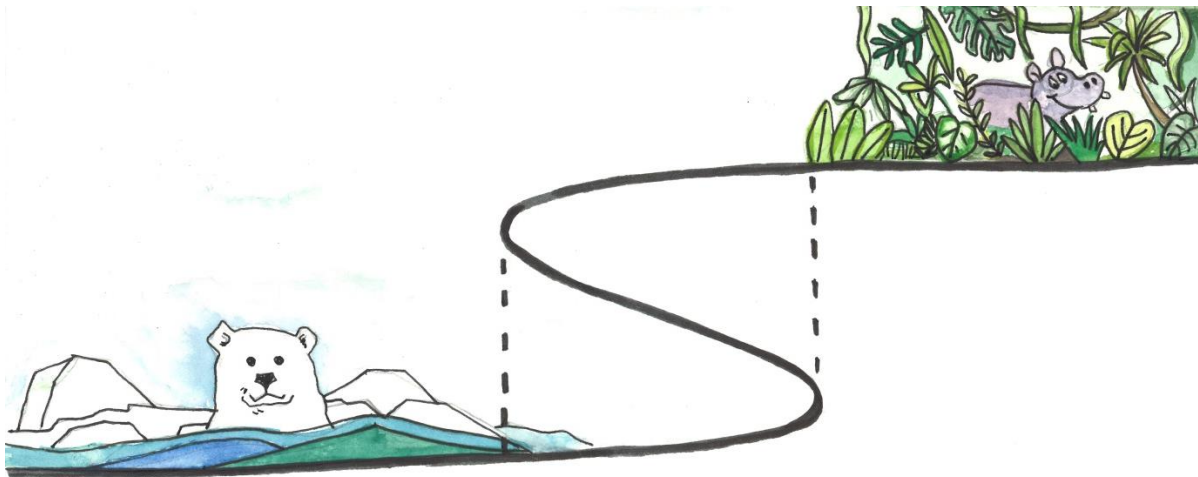
oorzaak. Dit maakt het lastig te voorspellen hoe zo'n systeem zich zal ontwikkelen. Je zit bijvoorbeeld in een kano en leunt voorover om beter in het water naar een vis te kunnen kijken. Je leunt verder en verder... totdat je plots beseft dat je de controle verliest en de kano omslaat. Vlak voor het punt waarop je omslaat, is een kleine rimpeling van het water al genoeg om jou en je kano uit balans te brengen en om te laten slaan. Het punt of moment waarop zo'n groot effect optreedt noemt men een '**tipping point**'. Na het overschrijden van dit punt verandert het systeem radicaal en komt het in een nieuwe, alternatieve, toestand.

Curriculum

<p>Aan het einde van deze module kan de leerling</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Tipping points in natuurwetenschappelijke en economische contexten noemen, herkennen en uitleggen ▪ De kenmerken van een systeem met een of meerdere tipping points grafisch herkennen en zelf grafisch weergeven ▪ Een differentiaalvergelijking herkennen en interpreteren ▪ Aan de hand van een differentiaalvergelijking en/of een grafiek een verwachting maken voor de ontwikkeling van het systeem vanuit een bepaalde beginsituatie en een gegeven verandering 	
Aandachtspunten	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Als in een systeem een tipping point wordt overschreden, verandert het systeem abrupt. ▪ Nadat een tipping point is overschreden, kan een systeem niet meer zo maar naar de situatie van vlak voor het tipping point terugkeren. ▪ Tipping points, terugkoppelingen en evenwichtspunten kunnen geïllustreerd worden met behulp van vergelijkingen en grafieken.
Denkvaardigheid (uit de gereviseerde taxonomie van Bloom)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Begrippen onthouden ▪ Grafieken en vergelijkingen begrijpen ▪ Begrippen, grafieken en vergelijkingen toepassen ▪ Systeem analyseren op tipping point-kenmerken ▪ Systeem evalueren op tipping point-kenmerken ▪ Een filmpje creëren met uitleg over tipping points, de relevantie ervan en een zelf bedacht voorbeeld
Begrippen	<ul style="list-style-type: none"> ▪ tipping point ▪ (in)stabiel evenwichtspunt ▪ hysteresis ▪ terugkoppeling ▪ differentiaalvergelijking ▪ vectorveld ▪ energiebalans ▪ moesson ▪ armoedeval

Afsluitende opdracht I

Na het lezen van deze module en het maken van de opdrachten ga je aan de slag met de eindopdracht. Je gaat een filmpje maken waarin je een systeem met tipping points beschrijft, en waarin je uitlegt waarom het begrijpen van systemen met tipping points zo belangrijk is voor onze aarde. Dit filmpje moet geschikt zijn voor onderbouwleerlingen van jouw school. Vraag bij het maken van je eindopdracht aan je docent of het systeem in je filmpje een voorbeeld uit deze module mag zijn, of dat je zelf op zoek moet naar een ander systeem waarin je tipping points verwacht. Presenteer je filmpje voor klasgenoten, je docent, je ouders, en wellicht voor een aantal onderbouwleerlingen van je school.



De opbouw van de module

Les	Activiteit	Uitwerking
1,2	Introductie van de eindopdracht	Inleiding zelfstandig lezen, startopdracht in tweetallen maken, 5min.-filmpje 'Hoe voorspel je een tipping point?', lezen en maken Hoofdstuk 1.
2,3	Verwerking theoretische basis	Lezen en maken Hoofdstuk 2. Eventueel met behulp van uitleg 'differentiaalvergelijkingen en vectorvelden' door de docent ► vectorveld met behulp van een applet tekenen
Go / no go (opdracht 6 moet goed gekeurd worden door de docent)		
4,5	Verwerking theoretische basis	Lezen en maken Hoofdstuk 3 (vraag je docent of je opdracht 13 ook moet maken). Eventueel met behulp van uitleg 'inkomende zonnestraling op aarde' door de docent ► veranderingen aanbrengen in een systeem met tipping points, met behulp van een applet
Go - no go (Praktische opdracht 10 moet goed gekeurd worden door de docent)		
5,6	Verwerking theoretische basis	Lezen en maken Hoofdstuk 4. Eventueel met behulp van uitleg 'moesson' door de docent ► veranderingen aanbrengen in een systeem met tipping points, met behulp van een applet
Go - no go (opdracht 17 moet goed gekeurd worden door de docent)		
7,8	Verwerking theoretische basis	Lezen en maken Hoofdstuk 5. Eventueel met behulp van uitleg 'armoedeval' door de docent ► veranderingen aanbrengen in een systeem met tipping points, met behulp van een applet
8,9,10	Eindopdracht	Inhoud verzamelen voor een kort filmpje, script/scenario schrijven en het filmpje opnemen ► filmpje opnemen over tipping points; uitleg, het belang van deze kennis, en een eigen voorbeeld van een systeem met een tipping point
Presentatie van de eindopdracht		

Startopdracht

Een paar jaar geleden waren de blauwe Adidas slippers met de bekende strepen de grootste gruwel op het modegebied. Wilde je het echt goed doen dan deed je er ook nog witte sportsokken bij aan; dan wist je zeker dat niemand met je gezien wilde worden. De enige plekken waar je op deze slippers kon komen waren de camping of de kleedkamer na het sporten. Tot een paar jaar geleden. Het startte met een klein groepje mensen dat de badslippers omarmde. Nadat een bepaald aantal mensen met de slippers gezien werd, verspreidde de trend zich als een lopend vuurtje. Tegenwoordig kun je prima gezien worden in de badslippers, met sokken en al. Andere modetrends die een soortgelijk pad volgden waren onder andere de Birckenstock en de tuinbroek.



Een ander voorbeeld van een systeem dat omslaat is te zien in een bekend filmpje van een eenzame danser (zoek op 'leadership from a dancing guy').

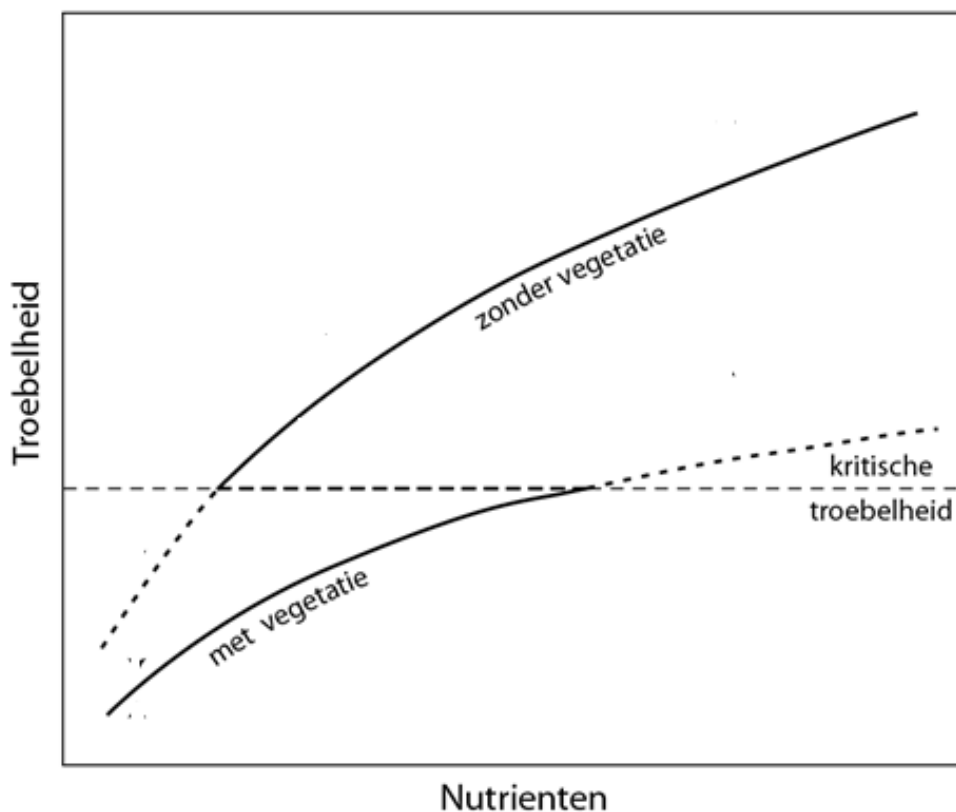
Bedenk nu zelf nog drie systemen waarvan jij denkt dat een kleine verandering een groot gevolg kan hebben. Schrijf niet alleen dit systeem op, maar ook wat die verandering is en hoe het systeem dan verandert.

Bekijk nu samen met je klasgenoten het filmpje 'Hoe voorspel je een tipping point?' van Tipping Point Ahead. Beoordeel de bedachte systemen van een klasgenoot. Zijn het goede voorbeelden van 'tipping points', oftewel kantelpunten?

Hoofdstuk 1: Tipping points in je vijver

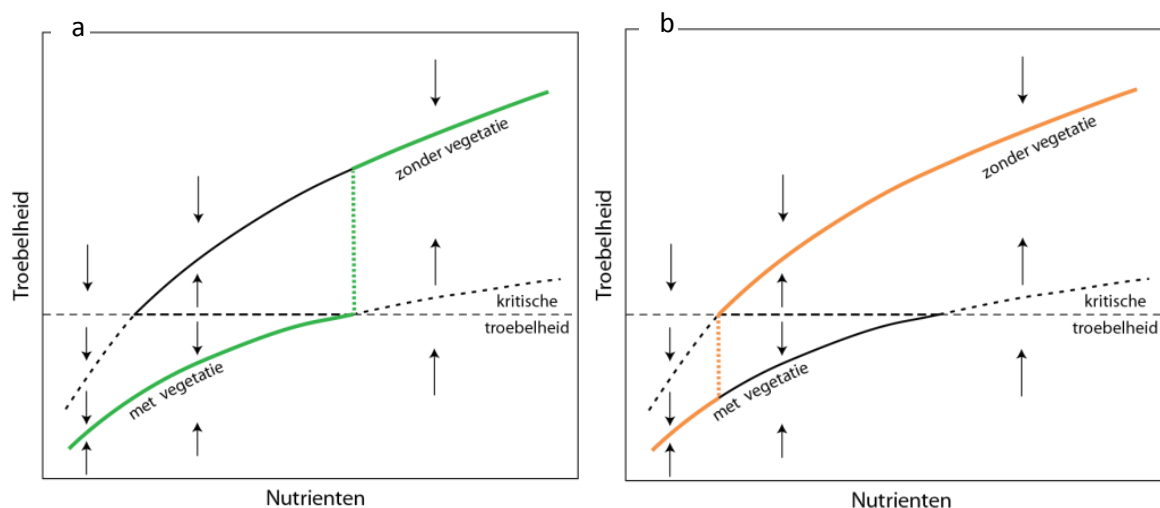
Om beter te begrijpen hoe tipping points en alternatieve evenwichten werken, nemen we een vijver als voorbeeld. Misschien heb je thuis wel een vijver. Is deze helder? Of juist troebel en groen door de algen? De troebelheid van het water heeft te maken met de hoeveelheid in het water opgeloste nutriënten (voedingsstoffen), zoals stikstof en fosfor. In een heldere vijver zijn weinig voedingsstoffen opgelost en groeien veel soorten waterplanten. De aanwezigheid van waterplanten helpt om het water helderder te maken, onder andere doordat planten slib vasthouden.

In Figuur 1.1 geeft de onderste kromme lijn aan, hoe de troebelheid van water afhangt van de hoeveelheid voedingsstoffen als er waterplanten zijn. De bovenste kromme geeft weer hoe deze relatie is als waterplanten ontbreken, oftewel de situatie zonder vegetatie. Zoals je kunt zien in de grafiek heb je bij dezelfde hoeveelheid voedingsstoffen een grotere troebelheid wanneer er geen waterplanten aanwezig zijn. Wat je ook kunt zien is dat wanneer het water troebeler wordt dan de kritische troebelheid (aangegeven met de horizontale stippellijn), de waterplanten afsterven. Dit komt doordat de waterplanten dan niet voldoende licht krijgen om energie te produceren. De belangrijkste oorzaak van het troebel worden van het water is de groei van algen. Als de hoeveelheid voedingsstoffen toeneemt, zal de algengroei toenemen met als gevolg dat het water troebeler wordt.



Figuur 1.1 Het verband tussen troebelheid en voedingsstoffen mét (onder) en zonder (boven) planten. De horizontale stippellijn geeft de kritische troebelheid weer: de waarde waarbij de waterplanten afsterven omdat er niet voldoende licht door het water komt.

Op het moment dat de kritische waarde wordt bereikt gaan alle planten dood. Het systeem verspringt dan naar de toestand met extreme algengroei, zonder planten, zoals te zien is in Figuur 1.2a. Op het moment dat je het aantal voedingsstoffen dat in het water terecht komt vermindert, springt de vijver niet direct terug naar de toestand met planten. Zoals je in Figuur 1.2b kunt zien, moet je de hoeveelheid voedingsstoffen heel erg verlagen, wil je weer bij de kritische troebelheid terecht komen. Uit onderzoek is namelijk gebleken dat waterplanten een belangrijke rol vervullen bij het helder maken van de vijver. Als die niet aanwezig zijn, zal het water dus troebeler zijn. Dit is te zien in de grafiek omdat de lijn zonder planten hoger ligt dan de lijn die de situatie met planten aangeeft. Dit betekent ook dat wanneer je begint met een troebele vijver zonder waterplanten, de hoeveelheid voedingsstoffen heel ver af moet nemen om weer onder de kritische troebelheid te komen (zie de gele lijn in Figuur 1.2).



Figuur 1.2 De overgang van een vijver met planten naar een vijver zonder planten (a) en weer terug (b). De groene lijn geeft aan hoe het verloop is als je begint in een vijver met planten en langzaam het aantal voedingsstoffen in het water toe laat nemen. De gele lijn laat zien wat er gebeurt als je begint met een troebele vijver en de concentratie voedingsstoffen langzaam af laat nemen. De pijltjes in de plaatjes geven aan naar welk evenwicht het systeem toe beweegt, afhankelijk van met welke troebelheid en hoeveelheid voedingsstoffen je begint.

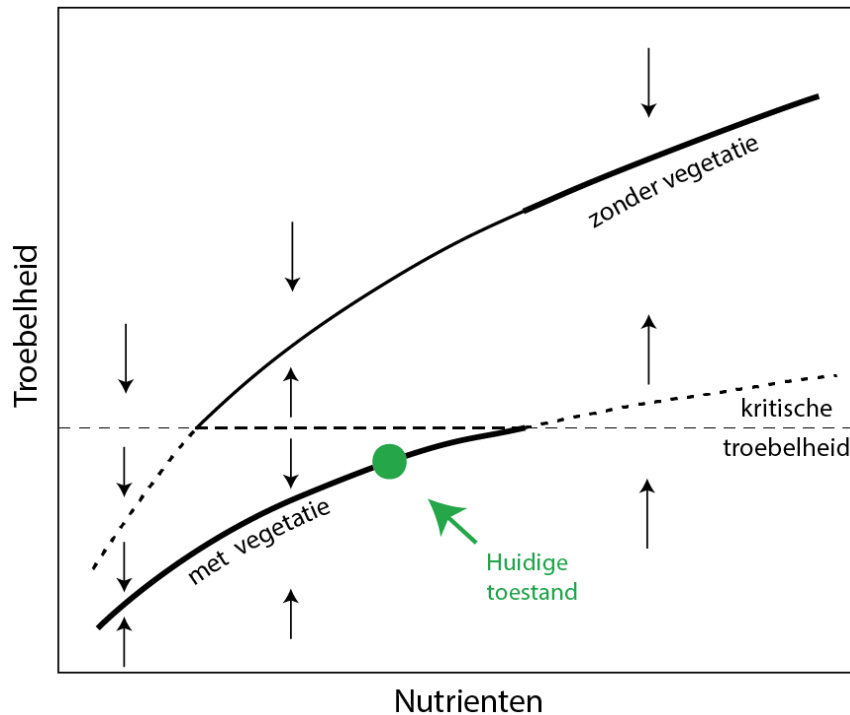
Opdracht 1.

Stel, je hebt een mooie heldere vijver met waterplanten en hier en daar een kikker. Je zou graag ook wat vissen in je vijver willen. Je twijfelt tussen goudvissen en een karper, maar uiteindelijk kies je voor de karper. Een karper eet voornamelijk kleine insecten en larven die zich verstoppen in het slib op de bodem.

- Wat zal er gebeuren met je vijver nu er een karper in zit?
- Geef in Figuur 1.3 aan wat er gebeurt met de toestand van je vijver.

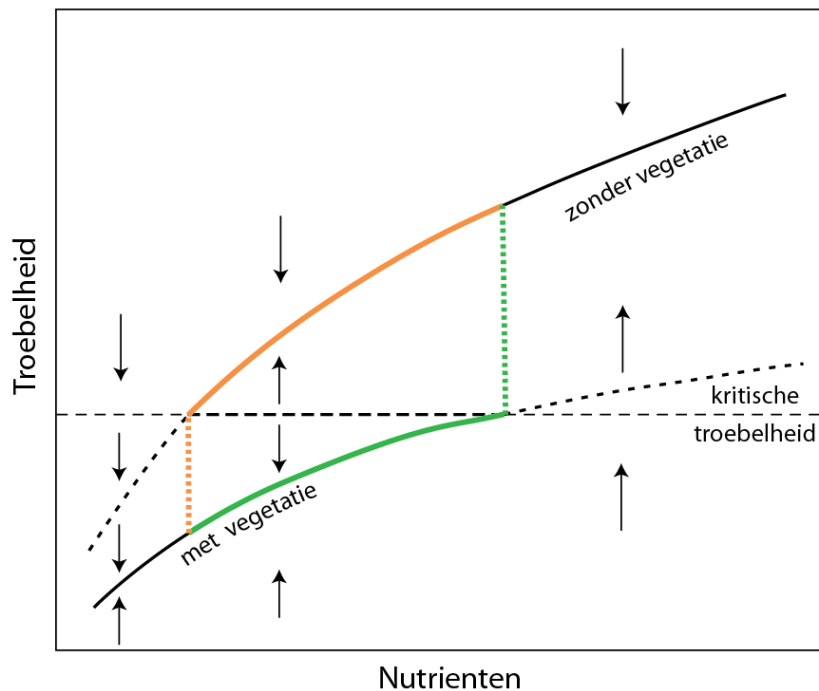
Na een paar dagen besluit je om de karper er weer uit te halen.

- Wat voor invloed heeft dat op je vijver? Beschrijf de twee mogelijke veranderingen aan de hand van Figuur 1.3.



Figuur 1.3 Het verband tussen troebelheid en voedingsstoffen in je vijver, met daarin de huidige toestand, zonder karper, aangegeven.

Zoals je in Figuur 1.2b kunt zien blijft het troebele, vegetatieloze systeem lang in die toestand, ook al neemt de hoeveelheid nutriënten af. Langer dan je zou verwachten, omdat het water pas weer helder wordt bij héle lage concentraties nutriënten. In Figuur 1.4 zijn de plaatjes 1.2a en 1.2b over elkaar heen gelegd. Daardoor kun je goed zien dat er een gebied in de grafiek is waar bij een bepaalde hoeveelheid voedingsstoffen twee mogelijke evenwichten zijn: met planten en zonder planten. Of je een vijver hebt met of zonder planten hangt in dit gebied niet alleen af van de hoeveelheid voedingsstoffen, maar ook van de beginsituatie waarin de hoeveelheid voedingsstoffen verandert. Dat wil zeggen, als je beginsituatie een troebele vijver is, dan heb je bij dezelfde hoeveelheid voedingsstoffen een ander evenwicht dan wanneer je beginsituatie een heldere vijver is. Het verschijnsel dat er meerdere evenwichtstoestanden mogelijk zijn bij dezelfde omstandigheden wordt ook wel **hysteresis** genoemd. In welk evenwicht het systeem zich bevindt hangt af van de beginsituatie.



Figuur 1.4 Voor een bepaalde hoeveelheid voedingsstoffen zijn er twee evenwichten mogelijk: een vijver met planten (groene lijn) en een vijver zonder planten (oranje lijn). In welk evenwicht je terecht komt is afhankelijk van je beginsituatie. Dit verschijnsel wordt hysteresis genoemd.

Opdracht 2.

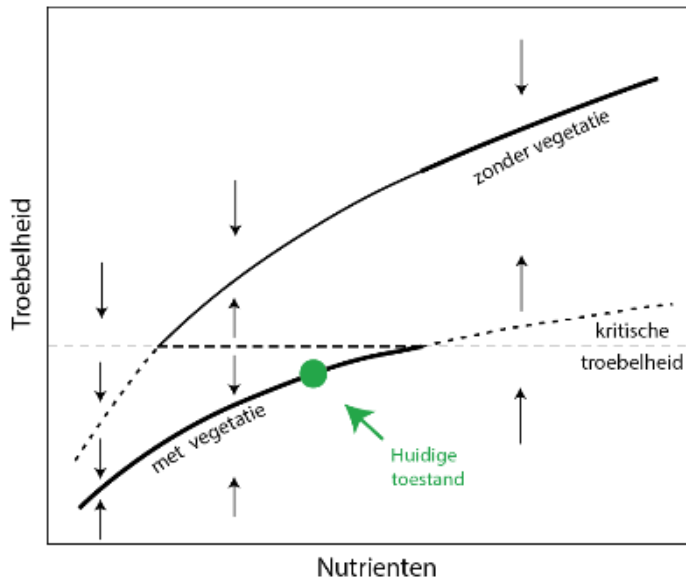
Een vriend vertelde je bij het zien van je troebele vijver dat goudvissen een stuk geschikter zijn voor een vijver dan karpers. Je hebt toen meteen goudvissen gekocht, maar niet te veel, want ook goudvissen wroeten graag in de bodem. Je vijver is intussen eindelijk weer helder en er groeien ook mooie waterplanten in.

Het is lekker weer, en omdat je het leuk vindt om naar je vissen te kijken, besluit je om ze iedere dag na het ontbijt even te bezoeken en te voeren. Je wilt natuurlijk niet dat je mooie vissen verhongeren.

- Teken in Figuur 1.5 wat dit voeren doet met je vijver.*
- Wat voor gevolgen heeft dit voor je vijver?*

Je vissen verhongeren niet, maar je planten gaan na een tijdje wél allemaal dood.

- Wat moet je doen om de vijver weer te krijgen zoals die was voordat je ging voeren?*



Figuur 1.5 Het verband tussen troebelheid en voedingsstoffen in je vijver, met daarin de huidige toestand, met goudvissen en waterplanten, aangegeven.

Waterplanten hebben een positief effect op de helderheid (het tegenovergestelde van troebelheid) van het water, bijvoorbeeld doordat de plantenwortels de bodemdeeltjes vasthouden. Helder water heeft vervolgens weer een positief effect op de planten doordat er genoeg licht op de bladeren kan vallen. Zo kan het vijverwater in korte tijd een stuk helderder worden, en verschuift het evenwicht van troebel naar een heldere vijver. Het effect van waterplanten op de helderheid is een voorbeeld van een **positieve terugkoppeling**.

Op het moment dat je voedingsstoffen toevoegt aan een heldere vijver zal er iets anders gebeuren. Door algengroei krijgen op een gegeven moment de waterplanten niet voldoende licht meer en zullen afsterven. De positieve invloed van de planten op de helderheid van het water valt hierdoor weg. Als één plant wegvalt, of één soort, zal het water dus troebeler worden, waardoor het ook voor de andere planten lastiger wordt om voldoende licht te krijgen. Het gevolg is dat de waterplanten in een neerwaartse spiraal komen. Zo'n situatie, waarbij een verandering zichzelf versterkt, is de onderliggende oorzaak van het verschuiven van je systeem naar een alternatief evenwicht. Het punt waarop een positieve terugkoppeling het systeem 'overneemt', is het **tipping point**.

Opdracht 3.

Geef in Figuur 1.5 de tipping points duidelijk aan.

We zullen in de komende hoofdstukken werken met andere voorbeelden van systemen met een positieve terugkoppeling. Zo krijgen we een beter beeld van alternatieve evenwichten en tipping points. We beginnen in hoofdstuk 2 met de wiskunde die nodig is om deze theorie te begrijpen. Veel van deze wiskunde ken je al. We plaatsen het hier in een praktisch voorbeeld.

Hoofdstuk 2: Theorie achter tipping points

Voor het beschrijven van hoe systemen in de loop van tijd veranderen hebben we wiskundige vergelijkingen nodig. Daarmee kunnen we bijvoorbeeld rekenen aan het vorige voorbeeld over het vijverwater. We kunnen met behulp van vergelijkingen berekenen wanneer het systeem een tipping point bereikt en plotseling naar een alternatief evenwicht verschuift. In dit hoofdstuk introduceren we de specifieke vergelijkingen die we daarvoor moeten gebruiken: differentiaalvergelijkingen.

Differentiaalvergelijkingen kunnen afschrikken, maar zijn leuker dan ze er uit zien en kunnen heel handig zijn! Wiskundige Ian Stewart publiceerde in 2012 een lijst met 17 vergelijkingen die de wereld hebben veranderd. Zes daarvan waren differentiaalvergelijkingen, de andere hadden ook met differentiëren te maken. In hoofdstuk 3, 4 en 5 passen we ze toe in 'Sneeuwbal aarde', 'De groene Sahara' en 'Armoedevallen'.

Wat is een vergelijking?

Differentiaalvergelijkingen vallen onder de noemer vergelijkingen, maar wat is een vergelijking eigenlijk? Het is een manier van vragenstellen, zoals 'welk wiskundig object wordt vijf, na toevoeging van twee?'. Waarschijnlijk begrijp je dit beter in de vorm van de vergelijking: $x + 2 = 5$. Het oplossen van zo'n vergelijking betekent dat je op zoek gaat naar het object dat de vraag beantwoordt, in dit geval een getal; $x = 3$. Vragen kunnen, net als in het dagelijks leven, één antwoord, meerdere antwoorden of geen enkel antwoord hebben. Hoe zit dat met vergelijkingen?

Opdracht 4.

- a. Zet de vergelijking $x = x + 1$ om in woorden, en probeer er achter te komen waarom deze vraag geen antwoord heeft.
- b. Leg in woorden uit waarom de vergelijking $x^2 = 4$ twee mogelijke antwoorden heeft.

Wat is een differentiaalvergelijkingen, en waarom zijn ze belangrijk?

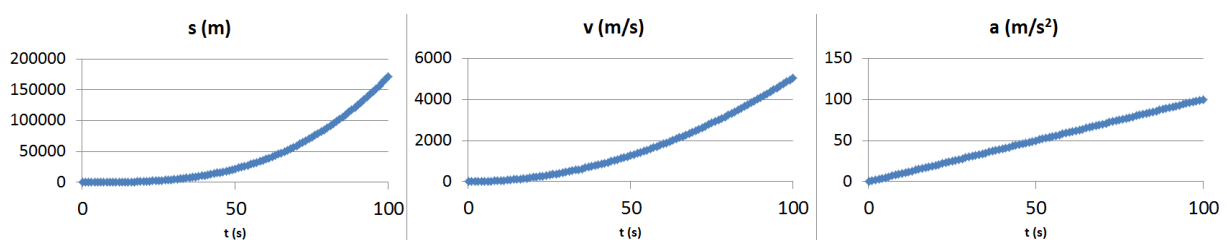
Het verband tussen twee grootheden, bijvoorbeeld tussen de troebelheid van het water en het aantal waterplanten, kan worden beschreven in de vorm van een vergelijking; een functie, vaak in de vorm $y(x, t) = \dots$. De afgeleide y' van die functie heet de differentiaalquotiënt, en beschrijft de helling van y in elk punt.

Een **differentiaalvergelijking** is een vergelijking met daarin, naast de bekende operatoren (+, -, ·, /) voor getallen, de zogenaamde 'differentiatie operator' voor functies. Een eenvoudig voorbeeld is de differentiaalvergelijking $y' = y$, oftewel, 'welke functie is gelijk aan zijn eigen afgeleide?'.

Als je al met afgeleides en met het getal van Euler ($e=2.718\dots$) hebt gewerkt, kun je narekenen dat de functies $y(t) = c \cdot e^t$, waarbij voor c elk getal ingevuld kan worden, geldige oplossingen zijn voor de differentiaalvergelijking $y' = y$. Gelukkig hoeven we differentiaalvergelijkingen niet altijd op te lossen om ze nuttig te kunnen gebruiken.

Uit de afgeleide van een functie is veel informatie te halen. Een wiskundige zal je vertellen dat als je van een onbekende functie de helling weet (oftewel je weet hoe het systeem op een bepaald moment verandert), je zonder de functie te kennen de hele functie toch stap voor stap kunt beschrijven (oftewel je kunt de systeemveranderingen voor allerlei momenten berekenen).

Een natuurkundige zal je vertellen dat als je bijvoorbeeld je positie en de tijd weet (Figuur 2.1a), je je snelheid kunt halen uit de afgeleide; de helling van je afstand-tijd grafiek. Deze hellingen leiden tot Figuur 2.1b. De afgeleide van die 'afgeleide snelheden' leidt vervolgens tot je versnelling (Figuur 2.1c). Differentiaalvergelijkingen zijn dus een ideaal wiskundig hulpmiddel om inzicht te krijgen in veranderingen en dus variatie in een systeem zoals plantengroei en nutriënten in een vijver.



Figuur 2.1 a: een afstand-tijd-diagram, b: een snelheid-tijd-diagram dat volgt uit de afgeleide (hellingen) in diagram a, c: een versnelling-tijd-diagram, dat volgt uit de afgeleide van b.

Vectorveld en evenwichtspunten van een differentiaalvergelijking

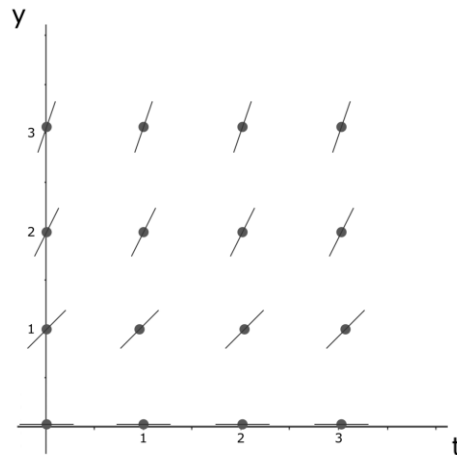
Het vinden van oplossingen voor differentiaalvergelijkingen is vaak lastig. Maar gelukkig kunnen we zonder ze op te lossen, toch veel informatie uit ze halen. Hiervoor gebruiken we zogenaamde 'vectorvelden' en 'evenwichtspunten'.

Vectorveld

Beelden zeggen vaak meer dan duizend woorden. Dat geldt ook voor differentiaalvergelijkingen, dus die gaan we visualiseren met behulp van een **vectorveld**. Zoals we hiervoor al geleerd hebben beschrijft een differentiaalvergelijking de helling van een functie op een bepaald moment en een bepaalde plaats. Hierbij is een helling gedefinieerd als hoeveel verticale eenheden je omhoog gaat als je één eenheid horizontaal verschuift.

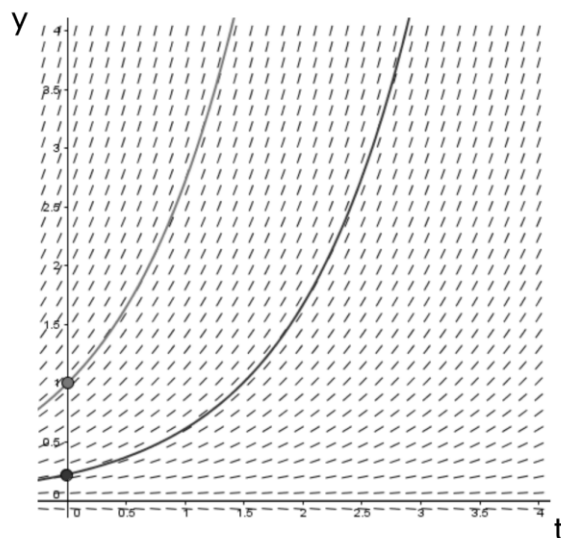
Laten we stap voor stap een vectorveld opzetten voor de eenvoudige differentiaalvergelijking $y' = y$. Allereerst maken we een diagram waarin we y (bijvoorbeeld een locatie) uitzetten tegen t (bijvoorbeeld de tijd).

Met behulp van $y' = y$ kunnen we voor elke waarde van y in het diagram de helling van de functie y berekenen en intekenen. De helling, y' , in een punt met bijvoorbeeld $y = 3$ is namelijk gelijk aan de waarde voor y , in dit geval 3. Hoe hoger y , hoe steiler de helling. Omdat de helling hier niet van t afhangt, is de helling voor elke waarde van t gelijk, zie Figuur 2.2.



Figuur 2.2 Een vectorveld van de differentiaalvergelijking $y' = y$

Je kunt de hellingen in Figuur 2.2 zien als wegwijzertjes. Een grafische manier van het oplossen van een differentiaalvergelijking vanuit een bepaalde toestand (bijvoorbeeld een vijver met veel nutriënten en weinig planten), is om vanuit dat punt de wegwijzer te volgen tot het volgende punt. Daar kun je weer de helling bepalen en de wegwijzer volgen tot het volgende punt, tot je bij een punt komt waar je niet meer doorverwezen wordt; de oplossing. Zoals al eerder gemeld hebben differentiaalvergelijkingen vaak meerdere oplossingen. In Figuur 2.3 kun je zien dat een ander beginpunt kan leiden tot een andere oplossing.



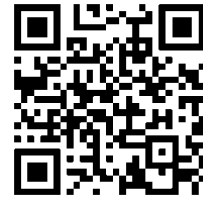
Figuur 2.3 Twee verschillende beginpunten leiden tot een verschillende ontwikkeling van het systeem; er zijn meerdere oplossingen van de differentiaalvergelijking.

Opdracht 5.

Maak op de computer met behulp van onderstaande applet een vectorveld van de vergelijking $y' = 2y$ en van $y' = ax + by$.

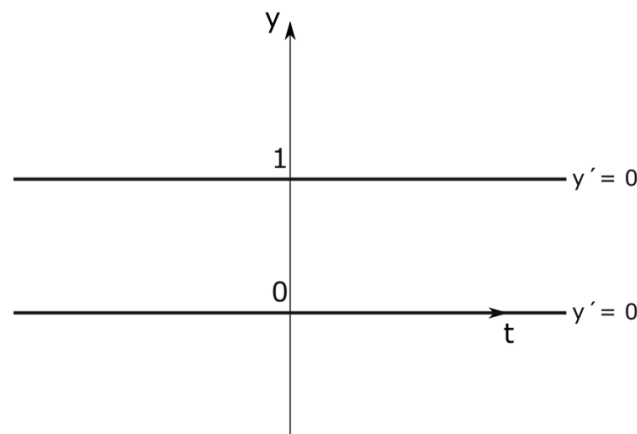
Verander de constanten a en b , en beschrijf wat er verandert.

<https://www.geogebra.org/m/u3VRk9Ab>

**Evenwichtspunten**

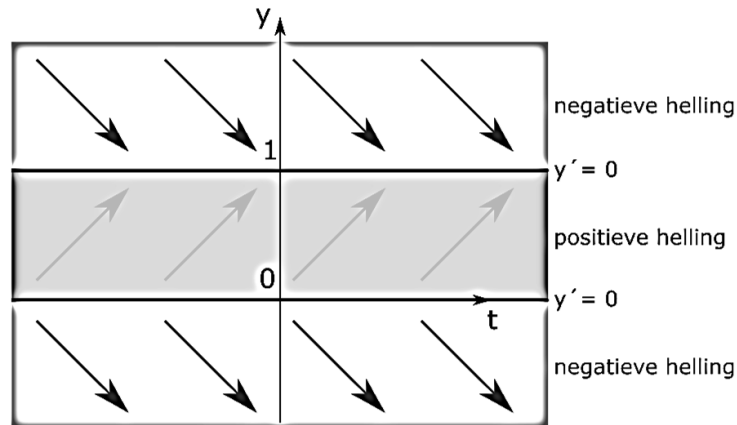
Voor het beschrijven van veranderingen van een systeem is het vaak voldoende als je weet of de helling positief, negatief of nul is, zonder daar een waarde van te kennen. Zoals je waarschijnlijk weet betekent een positieve helling een toename van de functie, een negatieve helling een afname, en een helling van nul betekent dat er niets verandert. We zullen hier als voorbeeld een eenvoudige situatie bestuderen met de differentiaalvergelijking $y' = y(1 - y)$.

We willen weten wanneer de functie y positief, negatief en nul is. De helling y' wordt beschreven door $y(1 - y)$, dus we weten voor alle waarden van y meteen of de functie positief danwel negatief is. We zien ook dat de helling y' niet afhangt van de tijd. Onze eerste stap is nu te vinden wanneer de helling nul is en de functie y dus niet verandert. Dit doen we door de vergelijking $0 = y(1 - y)$ op te lossen. De oplossingen $y = 0$ en $y = 1$ kunnen we grafisch weergeven als:



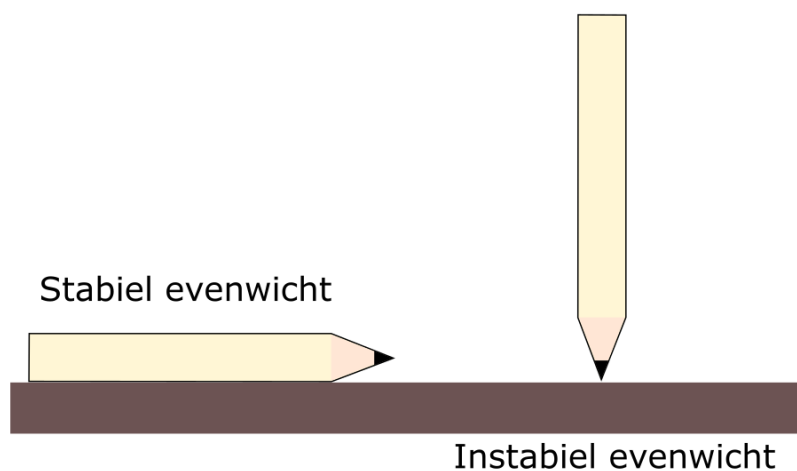
Figuur 2.4 Functie y met daarin lijnen van $y' = 0$, bepaald met de differentiaalvergelijking $y' = y(1 - y)$.

De lijnen met een helling van nul verdelen ons diagram in drie delen waarvoor de helling in elk geval niet gelijk is aan nul. We kunnen eenvoudig zien dat voor $0 < y < 1$ de helling $y(1 - y)$ positief is, en dat de helling negatief is voor $y < 0$ en voor $y > 1$. Dit geven we grafisch weer als:



Figuur 2.5 De functie y , met daarin lijnen van $y' = 0$, en de gebieden met positieve en negatieve helling, bepaald met de differentiaalvergelijking $y' = y(1 - y)$.

Neem in Figuur 2.5 een startpunt net boven $y = 0$. De helling van y is daar positief, wat betekent dat y zal toenemen. Als y groter wordt dan 1, komt het in een gebied met negatieve helling, en zal y juist weer afnemen. Voor $y = 1$ is de helling 0 en verandert y niet. De lijn $y = 1$ kan dus gezien worden als een evenwichtslijn waarvoor geldt dat het systeem naar de toestand $y = 1$ toe beweegt. Dit noemen we een stabiel **evenwichtspunt**, zoals in Figuur 2.6 is geïllustreerd als een potlood dat op tafel ligt en zal blijven liggen.



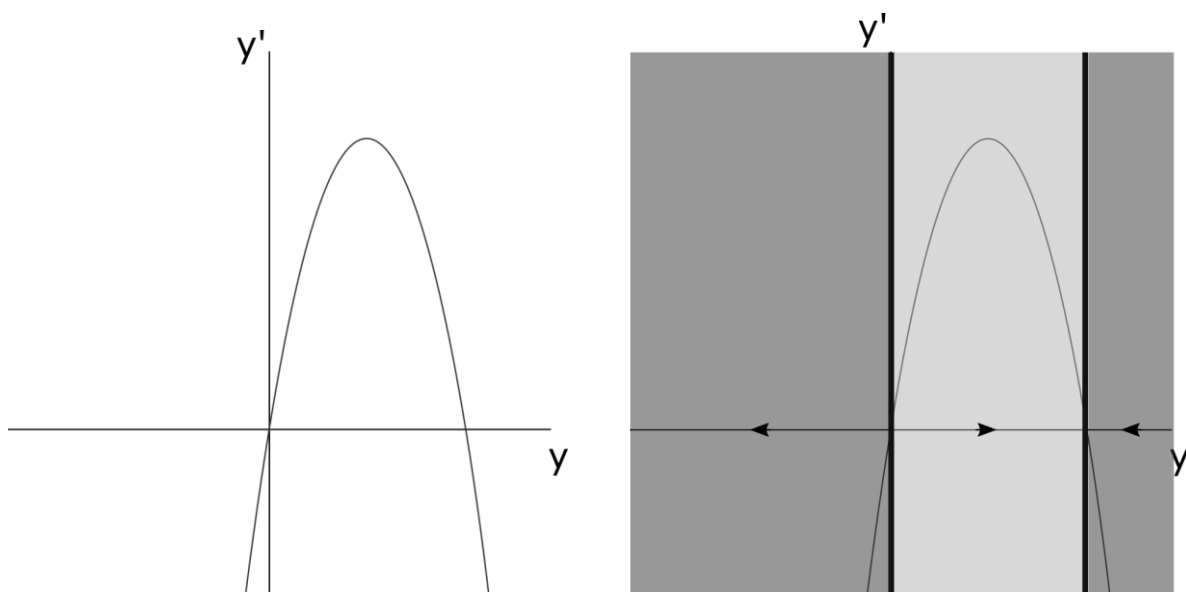
Figuur 2.6 Een voorbeeld van een stabiel evenwicht en van een instabiel evenwicht.

Opdracht 6; Deze opdracht moet door je docent goedgekeurd worden, voordat je verder kunt.

a. Beschrijf wat er gebeurt met het systeem van Figuur 2.5 rondom de evenwichtstoestand $y = 0$. Gebruik hiervoor een startpunt net boven én eentje net onder $y = 0$.

b Hoe zal dit type evenwichtspunt heten?

We kunnen de verandering van ons systeem met de differentiaalvergelijking $y' = y(1 - y)$ ook grafisch weergegeven zonder pijlen. Hiervoor is het handig y' uit te zetten tegen y , waarbij y op de horizontale as wordt geplaatst:



Figuur 2.7 De differentiaalvergelijking $y' = y(1 - y)$ grafisch weergegeven, met daarin de evenwichtspunten van y , en de gebieden waarin y toeneemt (licht) en afneemt (donker).

In Figuur 2.7 worden drie gebieden gevormd door de nulpunten van y' ; $y = 0$ en $y = 1$. Met kleur en voor de zekerheid ook met een pijl is op de horizontale as aangegeven of y toe- of afneemt in die toestand. Dit komt uiteraard overeen met het positief of negatief zijn van y' .

We zien in Figuur 2.7 duidelijk dat $y = 0$ een instabiele toestand is; bij een toestand met y net iets boven of onder nul, vindt er blijkbaar een terugkoppeling plaats (zie hoofdstuk 1) die ervoor zorgt dat de toestand alleen maar verder verwijderd raakt van de situatie $y = 0$. De toestand $y = 1$ is stabiel; rondom deze toestand vindt een terugkoppeling plaats die het systeem richting $y = 1$ beweegt.

Hoofdstuk 3: De aarde als sneeuwbal

De oppervlaktetemperatuur van de aarde is niet altijd hetzelfde geweest. Ongeveer 600 miljoen jaar geleden, toen er al eenvoudige organismen bestonden, was het op aarde zo koud dat zelfs de oceanen bevroren waren. De aarde moet er vanaf een afstand uitgezien hebben als een sneeuwbal. We noemen deze toestand dan ook de sneeuwbal-aarde.



Figuur 3.1 Een schatting van hoe de aarde er 600 miljoen jaar geleden vanuit de ruimte uitzag. (Did 'Snowball Earth' Epoch Trigger Rise of Animals? (2010). Geraadpleegd van <http://www.dailygalaxy.com>)

Wetenschappers geloofden lange tijd niet dat de sneeuwbal-aarde echt had bestaan. Ze konden zich niet voorstellen dat de aarde uit deze toestand zou kunnen ontsnappen. In de huidige toestand van de aarde wordt namelijk slechts 30% van de ontvangen zonnestraling weer de ruimte in gereflecteerd door wolken, luchtdeeltjes en ijs en sneeuw. De rest wordt gebruikt om de aarde op temperatuur te houden. In de toestand sneeuwbal-aarde is het hele aardoppervlak bedekt met sneeuw en ijs, en wordt de meeste zonnestraling weerkaatst, waardoor de aarde koud en besneeuwd blijft. Er is dus een positieve terugkoppeling tussen de bedekkingsgraad van ijs en sneeuw en de afkoeling van de aarde. Je kunt je voorstellen dat het daardoor heel lastig is om de aarde te laten smelten.

Opdracht 7.

Noem drie situaties die ervoor zouden kunnen zorgen dat de aarde ondanks de reflecterende ijslaag toch opwarmt.

Pas toen rond 1990 bewijzen werden gevonden voor het vroegere bestaan van sneeuwbal-aarde, gingen wetenschappers onderzoek doen naar het bevriezen en het smelten van de aarde. Alle processen kunnen nog niet in detail worden beschreven, maar het is duidelijk dat vulkanische uitstoot van CO₂ voor miljoenen jaren belangrijk was bij het ontsnappen aan de toestand sneeuwbal-aarde.

We werken nu als voorbeeld met een sterk versimpeld systeem aarde, zonder de invloeden van CO₂. Dit systeem heeft een stabiele evenwichtstoestand als sneeuwbal, en één als warme aarde zoals die vandaag de dag is.

Opdracht 8.

Beschrijf de twee tipping points tussen de evenwichtssituatie sneeuwbal-aarde en warme aarde.

We beschrijven dit systeem aarde met behulp van een aantal vergelijkingen die samen ons model vormen. In dit model variëren we de zonnestraling die het aardoppervlak bereikt, om te kijken wat er met de temperatuur van de aarde gebeurt. De vergelijkingen in ons model beschrijven de inkomende en uitgaande energie op aarde. Uit de balans van deze vergelijkingen blijkt vervolgens of de aarde energie verliest en dus afkoelt, of juist opwarmt door een overschot aan energie.

De binnenkomende energie door zonnestraling noemen we S . Een deel van deze straling wordt meteen gereflecteerd. Hoe meer weerkaatsing, hoe groter het zogenoemde albedo α , hoe minder energie er op aarde blijft. In ons huidige systeem aarde geldt $\alpha = 0.3$, oftewel 70% van de ontvangen zonnestraling ($1 - \alpha$) wordt echt geabsorbeerd en gebruikt om de aarde op te warmen (zie Figuur 3.2). De ontvangen energie E_{in} wordt dus beschreven als:

$$E_{in} = (1 - \alpha) S. \quad (\text{Vergelijking 3.1})$$

Als het kouder is, ontstaat er meer ijs, waardoor meer straling meteen weerkaatst wordt (α wordt hoger) en de aarde afkoelt en nog meer ijsvorming krijgt. Dit is een duidelijk voorbeeld van een positieve terugkoppeling; ijsgroei en weerkaatsing versterken elkaar. In de opdrachten hieronder laten we zien hoe en wanneer deze terugkoppeling tot het bevriezen van de aarde kan leiden.

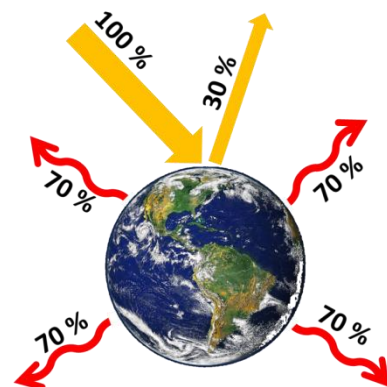
De aarde ontvangt straling van de zon, maar evenals de zon zendt de aarde ook straling uit. Deze straling is van een ander type, zogenaamd langgolvig in plaats van kortgolvig, maar dit uitstralen zorgt wel voor energieverlies. Hoe warmer de aarde, hoe groter het energieverlies E_{out} :

$$E_{out} = A + B T. \quad (\text{Vergelijking 3.2})$$

Hierin is T de gemiddelde temperatuur van de aarde in $^{\circ}\text{C}$, en A en B zijn constant. $A = 202 \text{ W/m}^2$ en stelt de energie uitgezonden door de aarde bij $T = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ voor. $B = 2.17 \text{ W/(m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C)}$ en staat voor hoeveel energie extra wordt uitgezonden als de aarde nog een graad warmer is.

Als de aarde in stralingsevenwicht is geldt $E_{in} = E_{out}$. De temperatuur van de aarde verandert dan niet. Deze **energiebalans** kunnen we invullen als:

Figuur 3.2 Energiebalans op aarde



$$(1 - \alpha)S = A + BT. \quad (\text{Vergelijking 3.3})$$

Opdracht 9.

- a. Herschrijf Vergelijking 3.3 voor de energiebalans zodat je de temperatuur T kunt berekenen als je de weerkaatsing α weet. Dit zal de vorm hebben van $T(\alpha) = \dots$.
- b. Welke temperatuur komt overeen met de huidige situatie waarbij $\alpha = 0,3$ en $S = 340 \text{ W/m}^2$?

Het effect van de gemiddelde temperatuur T op de reflectiviteit α kan worden weergegeven voor $T_1 < T < T_2$ met de vergelijking

$$\alpha(T) = \alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{T_2 - T_1} (T - T_1). \quad (\text{Vergelijking 3.4})$$

Voor $T < T_1$ geldt $\alpha = \alpha_1$, voor $T > T_2$ geldt $\alpha = \alpha_2$.

Go- no go

Opdracht 10; Deze praktische opdracht moet door je docent goedgekeurd worden, voordat je verder kunt.

- a. Schets een grafiek van de functie α , afhankelijk van T op de horizontale as, met de constanten $\alpha_1 = 0,7$; $\alpha_2 = 0,3$; $T_1 = -30^\circ\text{C}$; en $T_2 = 5^\circ\text{C}$. Als je met Excel kunt werken, kun je daarin een kolom met T 's aanmaken, α laten berekenen met behulp van de constanten en vergelijking 3.4, en een grafiek invoegen met α op de verticale as.
- b. Beschrijf de vorm van je grafiek, en leg uit waarom deze er zo uit ziet.

Opdracht 11.

- a. Voeg de functie $T(\alpha)$ uit opdracht 9 toe aan je figuur uit opdracht 10.
- b. Leg uit wat de snijpunten van de twee functies $T(\alpha)$ en $\alpha(T)$ betekenen.
- c. Onderzoek met behulp van de App Sneeuwbal 1 onder welke omstandigheden meerdere snijpunten mogelijk zijn en geef aan hoe dit van de binnenkomende zonnestraling afhangt.



App Sneeuwbal 1: <https://www.geogebra.org/m/WmRVDmZg>

Om het effect van CO_2 toch mee te nemen zou de binnenkomende zonnestraling S iets opgehoogd kunnen worden, aangezien CO_2 net als zonnestraling een

temperatuurverhoging veroorzaakt. In de *App Sneeuwbal 2* in Opdracht 12 zie je hoe de temperatuur van S afhangt.

Opdracht 12.

- Begin in de *App Sneeuwbal 2* bij $S = 340 \text{ W/m}^2$ (de huidige situatie). Verlaag S tot 290 W/m^2 door de rode bol te bewegen. Leg uit wat er gebeurt en waarom.
- Verhoog S nu weer naar de oude waarde van 340 W/m^2 . Wat gebeurt er met de temperatuur op aarde en waarom?
- Hoe kunnen we de temperatuur weer naar de huidige waarde herstellen?
- Wat zegt dit resultaat over de klimaatveranderingen aan het einde van de periodes waarin de aarde een sneeuwbal was?



App Sneeuwbal 2: <https://www.geogebra.org/m/CGWggNeS>

***Opdracht 13.**

Los de energiebalans-vergelijkingen op om de functie $T(S) = \dots$ te krijgen.

Hint: doe dit voor de drie verschillende situaties $T \leq T_1$, $T_1 < T < T_2$, en $T \geq T_2$.

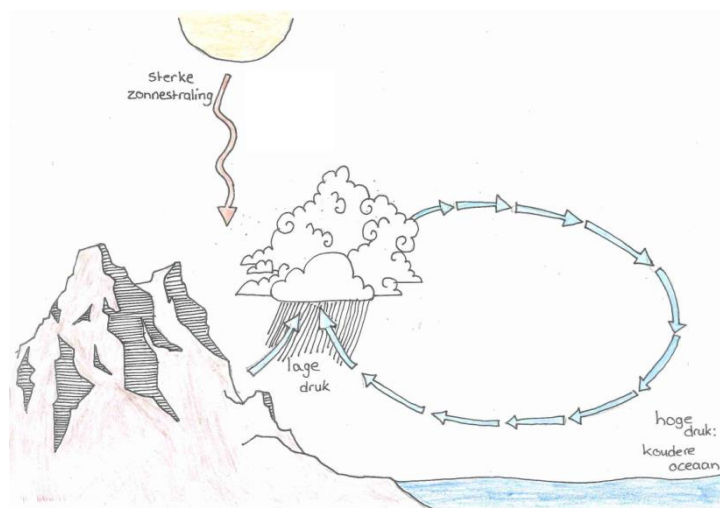
Hoofdstuk 4: De groene Sahara

Tegenwoordig is de Sahara de grootste woestijn op aarde waar maar weinig leven te vinden is. Opvallend genoeg worden er diep in de Sahara veel botten, pijlpunten en zelfs rotsschilderingen van bijvoorbeeld olifanten, giraffes en nijlpaarden gevonden. Blijkbaar was het klimaat en het ecosysteem in de prehistorie heel anders dan nu. Hoe kan dit?

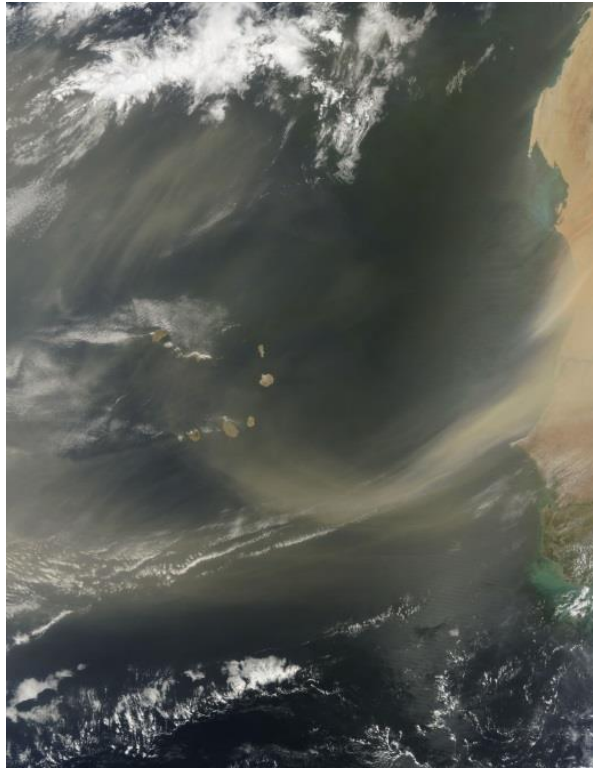
Dat het klimaat in de Sahara in de loop van enkele duizenden jaren zo veranderd is, heeft te maken met de rol van het landoppervlak van de Sahara in het klimaat: de woestijn draagt bij aan een droog klimaat, terwijl de begroeiing die er was in de tijd van de rotsschilderingen juist bijdroeg aan een nat klimaat. Dit heeft te maken met de verschillende kleur van woestijn en begroeiing. Je hebt misschien weleens gemerkt dat het in de zomer minder warm is als je lichte kleren draagt dan wanneer je donkere kleren draagt. Dit komt doordat donkere kleuren minder zonne-instraling reflecteren en dus meer warmte vasthouden. Zo is het ook met de Sahara, maar dan op veel grotere schaal: het lichte zand van de woestijn reflecteert meer zonne-instraling dan planten, die zijn namelijk donkerder. Hierdoor wordt een groene Sahara warmer dan een woestijnachtige Sahara.

In de groene Sahara stijgt de lucht veel hoger op, want warme lucht stijgt beter. De lucht is boven begroeiing ook nog eens vochtiger vanwege bodemverdamping en fotosynthese. Door de grote stijging van warme, vochtige lucht ontstaan regenwolken, die boven de begroeiing weer uitregenen. Deze regen is goed voor de begroeiing. Zie je dat er een positieve terugkoppeling bestaat tussen begroeiing en regenval? Meer begroeiing zorgt voor meer warmte en regenval, meer warmte en regenval zorgen juist voor meer begroeiing, en daarmee is de cirkel bijna rond!

De westkant van de Sahara ligt aan de kust. Opstijgen van lucht boven de groene Sahara zorgt ervoor dat de lucht beneden weer wordt aangevuld door lucht van zee. Deze lucht is zeer vochtig en versterkt de cirkel die we hierboven beschreven. Hierdoor ontstaat de **zomermoesson**; zie Figuur 4.1.

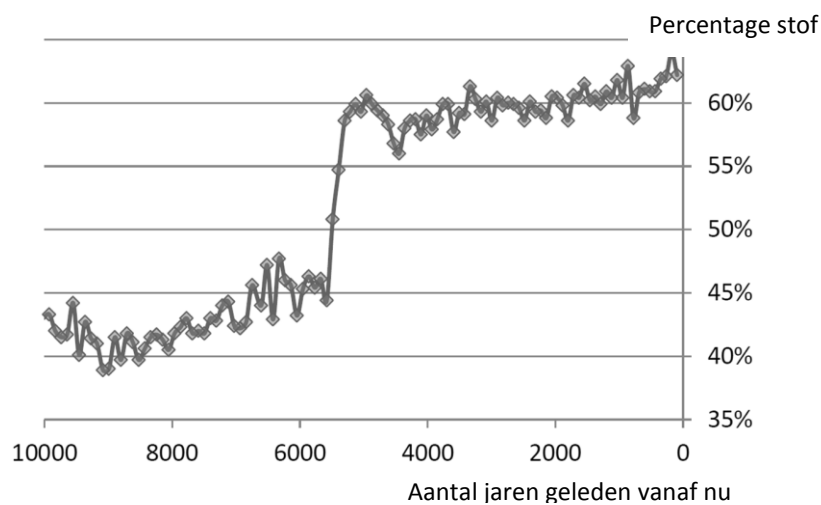


Figuur 4.1: Wanneer de zomermoesson actief is door veel zone-instraling op het land, stroomt er vochtige lucht vanuit de oceaan naar het land. Deze lucht stijgt op, het vocht in de lucht vormt druppels, en het gaat regenen. De nu droge lucht stroomt op grotere hoogte terug naar de oceaan.



Figuur 4.2: Satellietfoto waarop stofwolken van Saharastof ten westen van Afrika te zien zijn (Jeff Schmaltz, NASA Earth Observatory, 2009).

Eén van de manieren waarop we onderzoeken hoe de prehistorische Sahara eruit heeft gezien is door te boren in de bodem van de Atlantische Oceaan. In Figuur 4.2 zien we op een satellietfoto dat het Saharastof richting de oceaan wordt gewaaid. Uit bodemboringen is te bepalen hoeveel stof er vanuit de Sahara naar de oceaan is gewaaid. Hieruit blijkt dat er zo'n vijfduizend jaar geleden een snelle toename plaatsvond van door de wind meegebracht stof (zie Figuur 4.3). Dit is een aanwijzing dat er in die tijd een snelle overgang van een begroeid ecosysteem naar een woestijn plaatsvond.

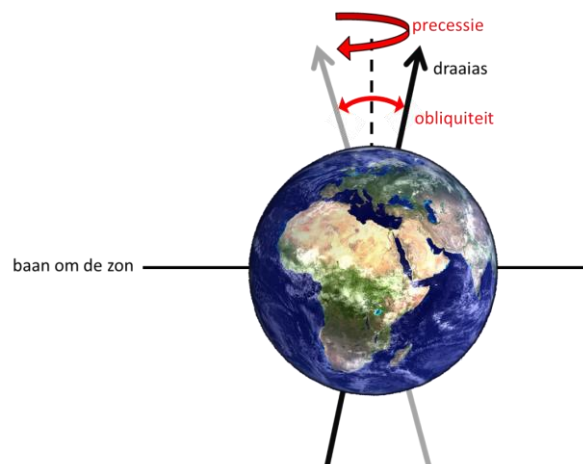


Figuur 4.3: Hoeveelheid stof in een bodemmeting uit de Atlantische Oceaan buiten de Afrikaanse westkust. Hoe meer stof er uit de Sahara werd meegevoerd naar de oceaan, hoe minder begroeiing er was in de Sahara.

Eén van de verklaringen voor de snelle toename van stof is dat er een tipping point werd overschreden. Dit kan veroorzaakt zijn doordat de begroeiing de moesson in stand hield toen de zonne-instraling afnam. Op een gegeven moment werd de zonne-instraling zo zwak dat zelfs de begroeiing de moesson niet meer in stand kon houden (zie Box 4.1 voor meer uitleg). In dit hoofdstuk gaan we met behulp van een begroeiingsmodel de mogelijkheden van een tipping point in de Sahara onderzoeken.

Box 4.1: Precessie

De oorzaak van de terugkerende klimaatveranderingen in de Sahara is de “precessie” van de aarde. Hoe precessie werkt is het makkelijkst te begrijpen door te denken aan een tol. De beweging van de draaias van de aarde lijkt op die van een draaitol die niet helemaal rechtop staat (Figuur 4.4).



Figuur 4.4: De aarde draait iedere dag een rondje om haar eigen draaias en maakt ieder jaar een rondje om de zon. Iedere 26 duizend jaar maakt die draaias zelf een rondje, net zoals een draaitol die niet rechtop staat.

Dit tollen gaat veel trager dan de dagelijkse draai van de aarde om de eigen as en de jaarlijkse draai om de zon: de “aarde-tol” maakt in ongeveer 26 duizend jaar een heel rondje. Dit zorgt ervoor dat niet altijd hetzelfde gedeelte van de aarde het meeste naar de zon gericht staat. Hierdoor verandert de zonne-instraling op een punt op aarde zeer langzaam. Ook is het zo dat de helling van de as niet constant is, maar wat heen en weer beweegt. De hoek tussen de draaias en de baan om de zon heet de obliquiteit en is ook belangrijk voor de zonne-instraling.

Tijdens een groene-Sahara-periode kreeg de Sahara relatief veel zonne-instraling in de zomer en warmde het land meer op, met zogenoemde moessonwinden als gevolg (zie Figuur 4.1).

We bekijken nu een simpel model voor de interactie tussen begroeiing en regenval, met behulp van de App Sahara 1: <https://www.geogebra.org/m/WGtA3wsd>



De kromme $V_{eq}(P)$ in bovenstaande app is een versimpelde weergave van hoe de begroeiing (vegetatie V) in de Sahara afhangt van de jaarlijkse regenval (precipitatie P). De begroeiing geeft weer hoeveel procent van het oppervlak op een natuurlijke manier bedekt is met planten. De blauwe lijn in de grafiek laat zien hoe de regenval P afhangt van begroeiing V :

$$P(V) = P_d + k * V. \quad (\text{Vergelijking 4.1})$$

Opdracht 14.

- Verklaar de vorm van beide krommen; $P(V)$ en $V(P)$.
- Wat betekenen de constanten P_d en K , en wat zijn hun eenheden?
- Wat betekenen de snijpunten van de blauwe en groene lijnen?
- Onder welke omstandigheden zijn er drie snijpunten? Denk aan vochtigheid, begroeiing en de sterkte van de terugkoppeling. Tip: verschuif k en P_d .

Nu maken we ons model tijdsafhankelijk. Met een tijdsafhankelijk model, zie hoofdstuk 2, kunnen we beschrijven hoe dingen veranderen in de tijd wanneer het systeem niet in evenwicht, equilibrium 'eq', is; in dit geval, wanneer de begroeiing $V \neq V_{eq}$. Een simpele manier om dit te doen is door aan te nemen dat de snelheid waarmee begroeiing V verandert, afhangt van het evenwicht volgens:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_{eq} - V}{\tau} \quad (\text{Vergelijking 4.2})$$

Opdracht 15.

- Wat is de eenheid van τ (de Griekse letter tau) en waar staat het hier voor?
- We nemen aan dat V_{eq} niet kan veranderen. Hoe zal V veranderen wanneer we beginnen bij $V < V_{eq}$? Waarom?
- En hoe zal V veranderen als we beginnen met $V > V_{eq}$? Waarom?



Nu laten we V_{eq} óók afhangen van P . Omdat $P = P_d + k * V$, hangt V_{eq} dan ook af van V zelf (een terugkoppeling). App Sahara 2 laat voor deze situatie zien hoe V verandert; we zien dV/dt ten opzichte van V : <https://www.geogebra.org/m/upH7qawf>

Opdracht 16.

- a. Wat gebeurt er in App Sahara 2 als we vlakbij een evenwicht beginnen? Bijvoorbeeld bij $k = 300 \text{ mm/jaar}$ en $Pd = 60 \text{ mm/jaar}$.
- b. Wat gebeurt er als je aan de andere kant van het evenwicht begint?
- c. Wat gebeurt er in de buurt van de andere evenwichten? Leg je antwoord uit.
- d. Op welke manier wijkt het middelste snijpunt af van de andere twee?
- e. Hoe kunnen we dit ook zien in de vergelijking voor dV/dt rondom dit punt?

Go- no go

Opdracht 17; Deze opdracht moet door je docent goedgekeurd worden, voordat je verder kunt.

- a. Bekijk in App Sahara 1 de situatie voor twee verschillende waarden van k : $k = 100 \text{ mm/jaar}$ en $k = 300 \text{ mm/jaar}$. Beweeg in beide gevallen Pd langzaam van het maximum naar het minimum. Wat gebeurt er met V in de tijd?
- b. Doe hetzelfde in App Sahara 2, wat gebeurt er nu voor beide waarden van k met V in de tijd?
- c. Welke van de twee bij a genoemde waarden van k is in overeenstemming met de resultaten in Figuur 4.3 uit de bodemboringen uit de oceaan?
- d. Kun je andere oorzaken bedenken waarom er een abrupte toename van stof wordt waargenomen in de oceaanbodem dan een plotselinge verandering in de moesson? Denk bijvoorbeeld aan mogelijke processen die lokaler zijn dan een grootschalig tipping point, zoals een verandering in winden of het uitdrogen van meren.

Hoofdstuk 5: Armoedevallen

Eén op de tien mensen leeft in extreme armoede. De werelddbank schrijft hierover: *“It is becoming even more difficult to reach those... in extreme poverty, who often live in fragile contexts and remote areas. Access to good schools, health care, electricity, safe water and other critical services remains elusive... Moreover, for those who have been able to move out of poverty, progress is often temporary: economic shocks, food insecurity and climate change threaten to... force them back into poverty”*¹.

Wat kunnen we hieruit leren? Allereerst gaat armoede niet alleen over gebrek aan inkomen en/of geld, maar ook over de beschikbaarheid van scholen, gezondheidszorg, elektriciteit en drinkwater. Ten tweede kan armoede gezien worden als een val; als je er eenmaal in zit, is het zeer lastig er weer uit te komen. Zelfs als je net bent ontsnapt, is de kans groot dat je opnieuw in de val loopt.

Je kunt je afvragen hoe mensen tot armoede vervallen, en hoe ze er weer bovenop komen. En waarom worden andere mensen alleen maar rijker en rijker? We kunnen dit systeem beschrijven met behulp van alternatieve evenwichten, tipping points en positieve terugkoppelingen, zoals we ook in voorgaande hoofdstukken hebben gedaan. In dit hoofdstuk zullen we een versimpeld voorbeeld van de samenleving onderzoeken, met behulp van wiskundige vergelijkingen en grafieken. We kijken daarbij naar het gevangen zitten in de armoedeval, en naar het ontsnappen uit de armoedeval.

Laten we beginnen met een eenvoudig voorbeeld van het concept armoede, over Lotte en Stijn uit Nederland. Lotte is net afgestudeerd, en nu startend onderzoekster, met een maandinkomen van EUR 1200,-. Ze woont in een studentenhuus, deelt de keuken en badkamer met vier anderen, heeft een tweedehands fiets en betaalt kamerhuur. Stijn is boer, heeft 100 koeien, en verdient gemiddeld per maand EUR 2000,-. Helaas is er op het moment weinig vraag naar melk, en verdient hij slechts EUR 1000,- per maand. Wie is er nu armer, Lotte of Stijn? Lotte heeft op dit moment meer inkomen, maar beide investeren in hun toekomst. Lotte door een goede opleiding en startersbaan, Stijn door zijn bezit van land en koeien. Met dit zogenoemde kapitaal kunnen beide later meer geld verdienen.

We nemen nu een voorbeeld over Farah en Arshad uit Bangladesh. Farah heeft gestudeerd en woont in de stad. Vanwege een economische crisis is ze haar baan en dus ook haar salaris kwijtgeraakt. Het is op het moment ontzettend lastig voor haar een nieuwe baan te vinden, en ze heeft geen geld om zich bij te scholen voor een andere baan. Arshad is ongeschoold en werkt op een boerderij in zijn dorp. Dit is een arm dorp, bijna niemand heeft bezittingen, en de oogst is dit jaar ook nog

¹ <http://www.worldbank.org/en/topic/poverty/overview>

eens mislukt. Leeft Farah in armoede? En als ze weer een baan vindt? Is Arshad armer zonder inkomen en zonder kapitaal in de vorm van opleiding en/of bezit? Kunnen we ze vergelijken met Lotte en Stijn?

Bovenstaande voorbeelden laten zien dat het van de context, in dit geval het land en het kapitaal, afhangt of iemand arm is of niet. Een inkomen onder de armoedegrens betekent niet per se dat diegene arm is. Lotte en Stijn zijn zoals we dat noemen tijdelijk arm, en kunnen door hun kapitaal (opleiding, bezit) later waarschijnlijk weer meer verdienen. Door tijdens het verdienen opnieuw te investeren in een nog betere opleiding of een betere technologie in je boerderij kun je vervolgens *nóg* meer verdienen; een positieve terugkoppeling tussen investeringen en rijkdom.

Helaas werkt deze terugkoppeling ook andersom: Risico's, onzekerheden, isolatie en andere factoren kunnen ervoor zorgen dat er niet geïnvesteerd wordt in technologie en kapitaal, waardoor het inkomen langzaam daalt. Stijns koeien worden bijvoorbeeld allemaal ziek, maar Stijn heeft niet genoeg geld om ze te vervangen door een nieuwe veestapel. Zijn inkomen zal dalen, en hij zal daarmee nooit genoeg geld verzamelen om alsnog nieuwe koeien te kunnen kopen. Net als Arshad uit Bangladesh kan Stijn niet zelfstandig uit de **armoedeval** komen; ze blijven relatief arm.

De veranderingen in kapitaal en armoede kunnen we wiskundig beschrijven met behulp van de concepten uit hoofdstuk 2. Laten we beginnen met een eenvoudige differentiaalvergelijking voor het kapitaal A , waarin A' staat voor hoe snel het kapitaal verandert per tijdseenheid:

$$A' = sI - \delta A \quad (\text{Vergelijking 5.1})$$

s staat voor hoeveel procent van het inkomen als spaargeld opzij wordt gezet, I is het inkomen per tijdseenheid, en $-\delta$ is de snelheid waarmee het kapitaal afneemt. Een voorbeeld van afname van het kapitaal is dat vijf jaar nadat Stijn een nieuwe tractor gekocht heeft, de tractor veel minder waard is geworden door slijtage en verouderde technieken. Vergelijking 5.1 laat zien dat de kapitaalverandering afhangt van wat je terugverdient uit je investeringen, sI , en van de waardevermindering van je kapitaal, δA .

Het inkomen I hangt af van het kapitaal A volgens:

$$I = T f(A) \quad (\text{Vergelijking 5.2})$$

T (van technologie) definieert de efficiëntie van de productie, zoals het voor je kapitaal beter is om een opleiding te doen voor een vak waar veel behoefte aan is, dan een opleiding die evenveel kost, maar waarbij je wordt opgeleid tot iets waarin geen banen beschikbaar zijn. $f(A) = A^\alpha$, $\alpha < 1$ beschrijft het maximum van dat wat er met het kapitaal gedaan wordt, zoals melkopbrengst bij Stijn, of bij Lotte de verkoop van haar kennis. Hoe meer kapitaal, hoe meer productie, maar dit effect

wordt steeds minder, zoals te zien is in Figuur 5.1. Stel Stijn verdubbelt zijn aantal koeien, dan worden de opbrengsten minder dan tweemaal zo groot. Voor een grote factor a (< 1) geldt dat deze afname van inkomensstijging of productiegroei pas bij een groot kapitaal plaats vindt.

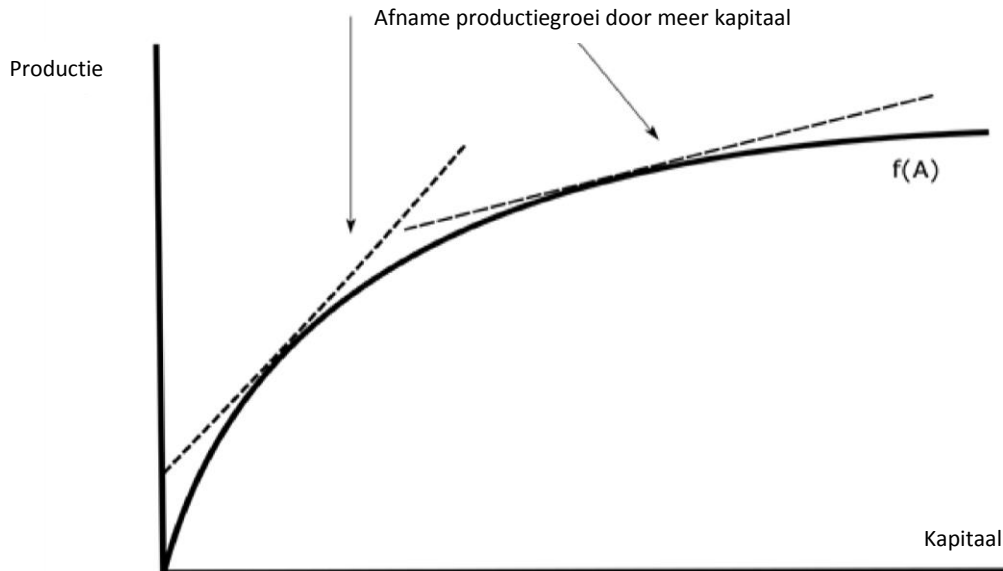


Fig. 5.1 De functie $f(A) = A^\alpha$, $\alpha < 1$: het verband tussen productie en kapitaal A .

We kunnen bovenstaande vergelijkingen combineren tot:

$$A' = s T f(A) - \delta A \quad (\text{Vergelijking 5.3})$$

en met $f(A) = A^\alpha$ geeft dit $A' = s T A^\alpha - \delta A \quad (\text{Vergelijking 5.4})$

Opdracht 18.

Vergelijking 5.4 is verwerkt in de App Armoede 1. Open deze, en verschuif α en δ , tot $\alpha = 0.5, \delta = 0.2$: <https://www.geogebra.org/m/MHwyxuYz>.



- Wanneer neemt A toe volgens dit model?
- Wanneer neemt A af volgens dit model?
- Wanneer verandert A niet?
- Waar zitten de tipping points in dit model, en zijn ze stabiel?
- Hoe veranderen de tipping points als je α en δ verhoogt, en waarom?

Als Stijn zijn aantal koeien verdubbelt, neemt de productie blijkbaar veel minder dan twee keer toe. Maar er zijn investeringen, waardoor de productie wel bijna lineair met het kapitaal toeneemt. Vaak zijn deze investeringen wel het duurst. Stijn heeft voor het kopen van een nieuwe tractor bijvoorbeeld veel inkomen nodig, en om dat inkomen te krijgen, moet hij een groot kapitaal hebben. Er is dus een bepaalde waarde voor zijn kapitaal, waarvoor geldt dat zijn inkomen genoeg is om een nieuwe tractor te kunnen kopen, om efficiënter productie te draaien.

In Figuur 5.2 zien we inderdaad dat voor duurdere investeringen, die meer kapitaal kosten zoals we in $f(A)_3$ zien, de productie sneller stijgt per kapitaal-eenheid. Het punt waarop de productie nul is, is het investeringsbedrag dat nodig is voordat de efficiëntere productie kan beginnen.

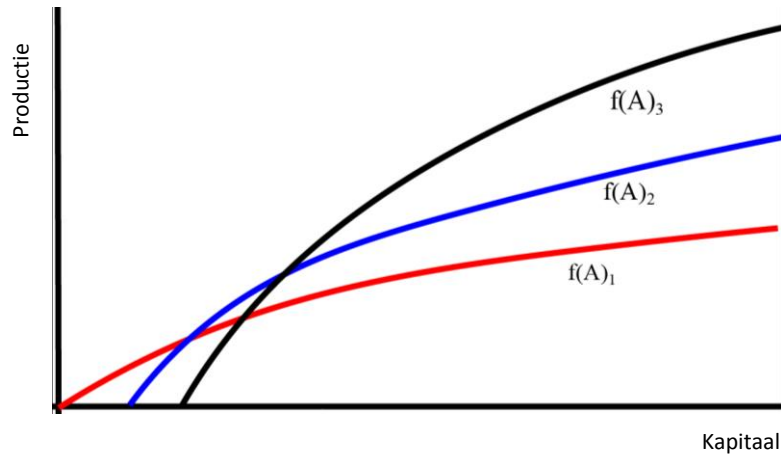


Fig. 5.2. Drie verschillende productie-functies, waarbij een bepaalde hoeveelheid kapitaal A leidt tot meer of minder productie.

Hoeveel je kunt investeren hangt af van je kapitaal, oftewel T hangt in ons model af van A . Meer kapitaal leidt tot betere investeringen en dus tot nog meer kapitaal. Herken je weer de positieve terugkoppeling? Deze is verwerkt in vergelijking 5.5, die tot Figuur 5.3 leidt:

$$I = T(A) f(A), \quad f(A) = A^\alpha, \quad \alpha < 1 \quad (\text{Vergelijking 5.5})$$

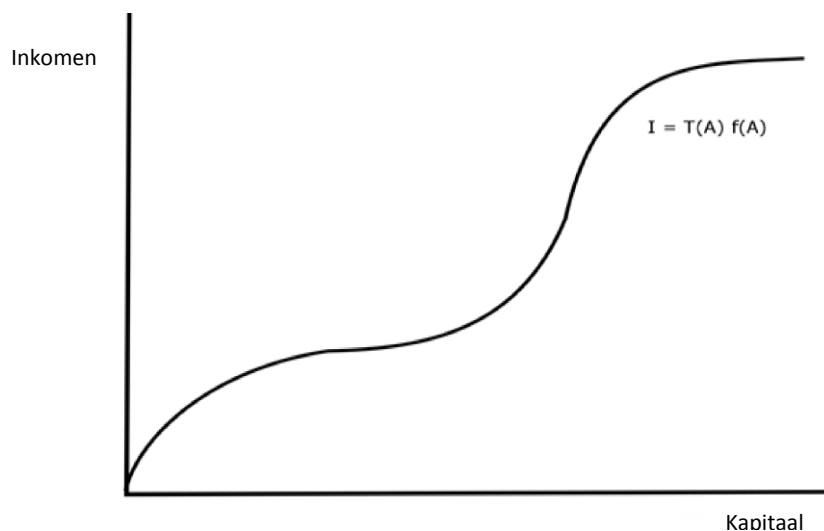


Fig. 5.3. De afhankelijkheid van het inkomen van het kapitaal, $I(A)$.

In het eerste deel van Figuur 5.3 herkennen we de functie f_1 uit Figuur 5.2; met weinig kapitaal kun je je productie niet efficiënter maken, want je hebt geen geld om in technologie te investeren. In het laatste deel herkennen we de functie f_3 ; bij veel kapitaal kunnen we van alles aanschaffen om zo het proces op te voeren. Daartussen zit een gebied waar een kleine verandering van kapitaal, enorme

stappen in je productie kan betekenen. Eenmaal in dit kapitaal-gebied kun je in de armoedeval raken, of er juist uitkomen.

Vergelijking 5.4 en 5.5 combineren geeft voor de kapitaal verandering:

$$A' = dA/dt = s T(A) A^\alpha - \delta A \quad (\text{Vergelijking 5.6})$$

Door het niet-lineaire verband tussen I en A , ziet de afgeleide A' er uit zoals in Figuur 5.4. Let op, er zijn nu meerdere evenwichten!

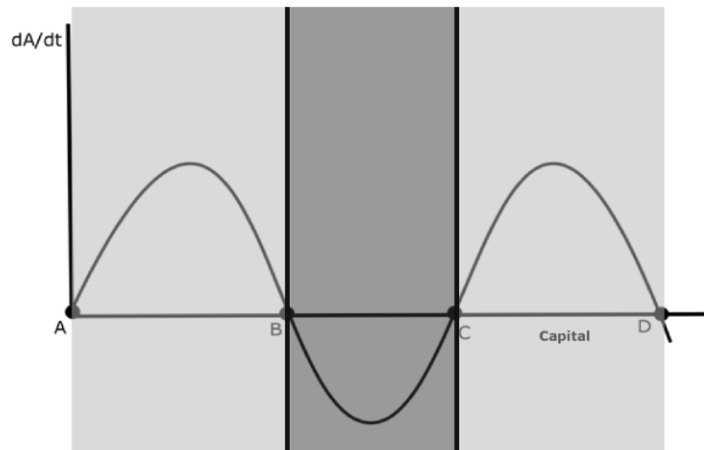


Fig. 5.4. De verandering van het kapitaal, afhankelijk van het kapitaal (Verg. 5.6).
Licht: toename, donker: afname.

Opdracht 19.

Open de App Armoede 2: <https://www.geogebra.org/m/xmAn64vK>.



- Geef de evenwichtspunten de letters A, B, ... (van links naar rechts) en geef van elk punt aan of ze stabiel zijn of niet.
- Geef aan wat het betekent voor de armoedeval als je van B naar C gaat? En van C naar D?
- Welke aanpassing zorgt ervoor dat je een tipping point in het model krijgt? Verklaar waarom die aanpassing voor een tipping point zorgt.
- Stel je hebt slechts €5,-. Wat kun je zelf doen om uit de armoedeval te komen? En hoe kan het economische systeem hier verandering in brengen? Denk hierbij aan de constanten in Vergelijking 5.6.
- Hoe kan een microcrediet (lening) je helpen uit de armoedeval te komen?

Afsluitende opdracht II

De eindopdracht van deze module luidt als volgt:

Ter afsluiting van deze module maak je een filmpje van ongeveer 5 minuten over een systeem met tipping points. Maak hierin aan onderbouwleerlingen duidelijk welke processen en terugkoppelingen voor een tipping point zouden kunnen zorgen in jouw systeem. Leg hysteresis in je filmpje uit, en gebruik waar nodig wiskundige vergelijkingen. Aan de hand van je voorbeeldsysteem leg je vervolgens uit waarom de theorie achter tipping points belangrijk is voor onze aarde. Succes, maak er wat moois van!

Beoordeling

Noteer hier de feedback die je hebt gekregen van je docent, en/of die je hebt gekregen van de leerlingen. Ga voor de verschillende criteria na waarin je al gevorderd bent. Schrijf vervolgens op wat je aandachtspunten zijn. Daaruit concludeer je wat je twee voornaamste leerpunten zijn. Wat doe je de volgende keer anders bij het lezen, het maken van de tussenopdrachten en de eindopdracht. En hoe en waarom ga je dat anders doen?

Ontwikkelpunten	Criteria	Gevorderd
<i>Dit verdient aandacht</i>	<i>Volgende resultaat</i>	<i>Duidelijk beter dan standaard</i>
	Startopdracht en opdrachten <ul style="list-style-type: none"> De opdrachten zijn allemaal gemaakt De opdrachten zijn dusdanig gemaakt dat de stof ruim voldoende begrepen wordt. 	
	Go – no go opdrachten <ul style="list-style-type: none"> De opdrachten zijn goed uitgevoerd. Er is een goede grafiek gemaakt De applets zijn goed gebruikt 	
	Het maken van het filmpje <ul style="list-style-type: none"> De theorie uit de module komt terug in het filmpje Tipping points, hysteresis, evenwicht en terugkoppeling worden duidelijk uitgelegd. Het filmpje sluit aan op de doelgroep. Het filmpje nodigt uit tot kijken. Het filmpje toont een duidelijke boodschap. 	

Leerpunten voor de volgende module (concreet en meetbaar geformuleerd)

Tipping points, zo werken ze!

